This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Acerca de este libro

Esta es una copia digital de un libro que, durante generaciones, se ha conservado en las estanterías de una biblioteca, hasta que Google ha decidido escanearlo como parte de un proyecto que pretende que sea posible descubrir en línea libros de todo el mundo.

Ha sobrevivido tantos años como para que los derechos de autor hayan expirado y el libro pase a ser de dominio público. El que un libro sea de dominio público significa que nunca ha estado protegido por derechos de autor, o bien que el período legal de estos derechos ya ha expirado. Es posible que una misma obra sea de dominio público en unos países y, sin embargo, no lo sea en otros. Los libros de dominio público son nuestras puertas hacia el pasado, suponen un patrimonio histórico, cultural y de conocimientos que, a menudo, resulta difícil de descubrir.

Todas las anotaciones, marcas y otras señales en los márgenes que estén presentes en el volumen original aparecerán también en este archivo como testimonio del largo viaje que el libro ha recorrido desde el editor hasta la biblioteca y, finalmente, hasta usted.

Normas de uso

Google se enorgullece de poder colaborar con distintas bibliotecas para digitalizar los materiales de dominio público a fin de hacerlos accesibles a todo el mundo. Los libros de dominio público son patrimonio de todos, nosotros somos sus humildes guardianes. No obstante, se trata de un trabajo caro. Por este motivo, y para poder ofrecer este recurso, hemos tomado medidas para evitar que se produzca un abuso por parte de terceros con fines comerciales, y hemos incluido restricciones técnicas sobre las solicitudes automatizadas.

Asimismo, le pedimos que:

+ *Haga un uso exclusivamente no comercial de estos archivos* Hemos diseñado la Búsqueda de libros de Google para el uso de particulares; como tal, le pedimos que utilice estos archivos con fines personales, y no comerciales.

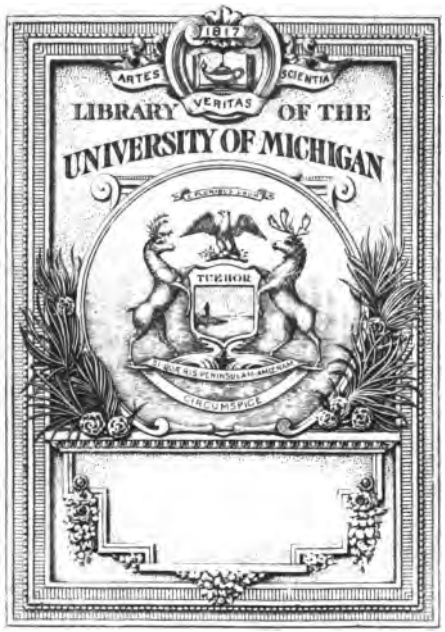
+ *No envíe solicitudes automatizadas* Por favor, no envíe solicitudes automatizadas de ningún tipo al sistema de Google. Si está llevando a cabo una investigación sobre traducción automática, reconocimiento óptico de caracteres u otros campos para los que resulte útil disfrutar de acceso a una gran cantidad de texto, por favor, envíenos un mensaje. Fomentamos el uso de materiales de dominio público con estos propósitos y seguro que podremos ayudarle.

+ *Conserve la atribución* La filigrana de Google que verá en todos los archivos es fundamental para informar a los usuarios sobre este proyecto y ayudarles a encontrar materiales adicionales en la Búsqueda de libros de Google. Por favor, no la elimine.

+ *Manténgase siempre dentro de la legalidad* Sea cual sea el uso que haga de estos materiales, recuerde que es responsable de asegurarse de que todo lo que hace es legal. No dé por sentado que, por el hecho de que una obra se considere de dominio público para los usuarios de los Estados Unidos, lo será también para los usuarios de otros países. La legislación sobre derechos de autor varía de un país a otro, y no podemos facilitar información sobre si está permitido un uso específico de algún libro. Por favor, no suponga que la aparición de un libro en nuestro programa significa que se puede utilizar de igual manera en todo el mundo. La responsabilidad ante la infracción de los derechos de autor puede ser muy grave.

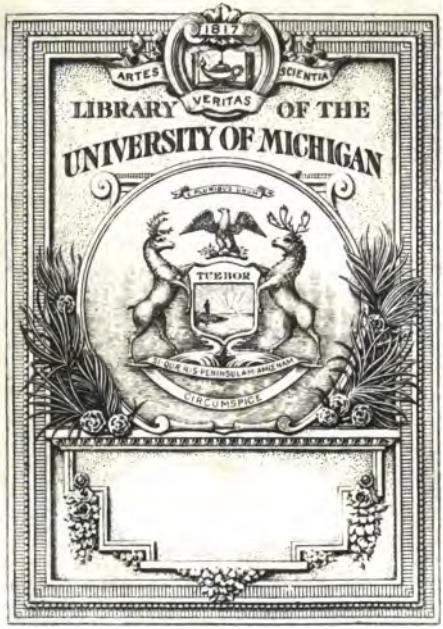
Acerca de la Búsqueda de libros de Google

El objetivo de Google consiste en organizar información procedente de todo el mundo y hacerla accesible y útil de forma universal. El programa de Búsqueda de libros de Google ayuda a los lectores a descubrir los libros de todo el mundo a la vez que ayuda a autores y editores a llegar a nuevas audiencias. Podrá realizar búsquedas en el texto completo de este libro en la web, en la página `http://books.google.com`


1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

QA
35
.C41

3 3 - 1


1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

QA
35
.C41

I.P. Comitis inv. et delin.

Franciscus Bois Sculp. Barcinone Anno 1758.

LICIONES
DE MATHEMATICA,
O
ELEMENTOS GENERALES
DE ARITHMETICA,
Y
ALGEBRA
PARA EL USO DE LA CLASE,

POR EL P. THOMAS ÇERDA
de la Compañia de Jesvs,
Profeſſor Real de Mathematicas en Barcelona
En el Colegio de Nobles de Santiago
de Cordellas.

TOMO PRIMERO.

CON PRIVILEGIO DEL REI NUESTRO SEÑOR.

BARCELONA.

Por FRANCISCO SURIÁ, Impreſſor de la Real Academia de Buenas Letras de dicha Ciudad. Año 1758.

Mathematics
Water
7-30-26
13622

AL MUI ILUSTRE

AYUNTAMIENTO

DE LA CIUDAD DE BARCELONA.

11-21-30 N65

MUI ILUSTRE SEÑOR.

Siendo esta la primera Obra, que da al Publico esta Clase de

Mathematicas, que por propenſion de ſu Amor à los Naturales de eſte Principado, ſe ha dignado Su Mag.d, à ſolicitud de V. S.a, erigir en eſta Ciudad de Barcelona, dotandola de ſuerte, que pueda perpetuizarſe ſu enſeñanza, es mui juſto, que preſente Yo la tal Obra à V. S.a, ya para moſtrar mi agradecimiento à lo que V. S.a tanto ha contribuido, ya tambien por haberſe trabajado con el fin principal de ſervir al Bien Publico del Eſtado

en una Ciencia, que en el dia es las Delicias de la Europa. *Siempre han tenido en V. Sª. ſu proteccion, y acogimiento las Ciencias, y Buenas Artes, lo que ha elevado à V. Sª. à tan ſublime grado de honor, como es notorio al Mundo todo, y ſeria corto eſte Librito aun para apuntarlo. Reciba V. Sª eſta prueba de mi agradecimiento, nacida de la complacencia, que tengo de emplearme en la educacion de una Juventud tan florida, como la*

que ſe ve, que por todas partes brilla en eſta Capital, y Principado.

De eſte Colegio, y Barcelona 13 de Setiembre de 1758.

MUI ILUSTRE SEÑOR.

B. L. M. de V. S.

Su más obſequioſo, y atento Servidor

Thomas Cerdá de la Compª. de JHS.

A LA JUVENTUD ESPAÑOLA.

PARA vosotros, ò Nobles Jovenes, Delicias, y Esperanzas de nuestra Nacion Española se trabaja unicamente esta Obrita, à fin de evitar la molestia de escribir en la Clase, y poder dar con alguna mayor extension estos Tratados, los mas esenciales, por ser los Fundamentos de esta grande Ciencia de las Mathematicas. No he sido en el disponer esta Obra del parecer de algunos, que omiten varios puntos en los Elementos, por parecerles sobrado arduos para los Jovenes, que empiezan; porque juzgo, que sería hacer agravio à vuestros talentos, el omitir algunos puntos por dificiles, sí son utiles; ni conoce el fondo de la Nacion Española, quien no lo juzgue. La experiencia me ha enseñado, que son capaces nuestros Jovenes de imponerse en qualquier punto, si se les propone como se debe. Es verdad, que algunas veces la dificultad de escribir en la Clase algunos Tratados hace, que en los Manuscritos se encuentren de suerte, que es imposible el entenderlos; por esso mi principal cuidado, y conato es el imprimir mis Liciones, ya porque habiendo de escribir en la Clase, el tiem-

po mas apreciable à los Diſcipulos, que es el que eſtán con ſus Profeſſores, ſe pierde caſi todo en un trabajo material, ſiempre inutil, y tal vez pernicioſo; ya tambien porque la penuria del tiempo obliga à omitir muchas coſas baſtante neceſſarias, otras darlas tan ſuperficialmente, que no merecen nombre de Elementos; en fin por impreſſo, ſin tanta moleſtia, ſe puede dar quatro veces mas, y mejor de lo que ſe da por eſcrito; porque es cierto, que aun los mas cuidadoſos Profeſſores de las quatro partes del tiempo, que eſtán con ſus Diſcipulos, emplean las tres en eſcribir, y la otra en practicar, ò explicar: luego ſupueſtos ya impreſſos los Tratados, eſto que ſe empleaba en dictar, ſe emplea en explicacion, y hará en eſte caſo en un año ſolo un Maeſtro tanto, como en quatro eſcribiendo. Añadeſe, que muchos Señoritos, que ſi ſe han de ſujetar à eſcribir, como Niños, no emprenderán el arduo eſtudio de las Mathematicas, atrahidos de la oportunidad de tenerlo impreſſo, guſtarán de imponerſe en algunos puntos, que hacen gran parte de la buena educacion, que debe tener un Caballero de prendas, quedandoſe tal vez de otra ſuerte diamante bruto, aquel que por ſus brillos podria ſer el luſtre de toda una Nacion. Para lograr pues en alguna manera tanta utilidad, mi fin es dar impreſſos los Tratados.

Pero como no me puedo prometer de mi miſmo ni la fortuna de que agraden al Publico mis Eſcritos, ni de coſtear todo lo neceſſario para ſemejantes Impreſſiones, adelanto eſta Obrita para ſondar el guſto de nueſtra Nacion Eſpañola. Si acertára à tener la dicha de ſer en eſto de alguna utilidad à mi Patria, concluido el ſegundo Tomo de las Equaciones, el mas eſſencial de la Algebra, que actualmente ſe eſtá imprimiendo, comenzará la Impreſſion de los otros tres, que tengo ya diſpueſtos para ello; es à ſaber, la *Geometría*, y *Trigonometría*, la *Aplicacion de la Algebra à Geometría*, y *Curvas*, el *Methodo Directo*, è *Inverſo de las Fluxîones*, que otros llaman *Calculo Diferencial*, è *Integral*; y allanados eſtos paſſos, ſegun vea la diſpoſicion del Publico, proſeguiré en las otras partes ſuperiores, aſſegurando, que procuraré en los Elementos de cada Ramo de las Mathematicas, el poner los puntos ſegun el eſtado, en que actualmente ſe encuentran eſtas Ciencias en Inglaterra, y Francia, dos Naciones ſin duda las mas adelantadas en eſta materia, entreſacando de ſus Libros lo mas ſelecto, para poderlo ofrecer por obſequio à nueſtra Eſpaña, à cuyo luſtre debe contribuir qualquier fino Eſpañol por la parte, que à él le pertenece. Y aſſi tomad, ò Nobles Jovenes, eſte mi deſeo de ſerviros; ſuplicando

INDICE

DE LOS CAPITULOS, Y ARTICULOS contenidos en eſte primer Tomo.

PROEMIO, *Pag.* 1
CAP. I. Diferencia entre la Arithmetica, y Algebra, 5
CAP. II. Propriedad, y Valor de los Numeros, 9
CAP. III. De las quatro Reglas Fundamentales de la Arithmetica Comun, 14
ART. I. Sumar Quantidades Enteras, y Mixtas, 15
ART. II. Reſtar una Quantidad de otra, 19
ART. III. Multiplicar una Quãtidad por otra, 24
ART. IV. Dividir una Quantidad por otra, 30
ART. V. Algunas coſas, que ſe ſuelen ofrecer en la practica de la Multiplicacion, y Diviſion, 39
CAP. IV. De las quatro Operaciones Fundamentales de la Algebra, 48
ART. I. Noticias previas para las Operaciones de Algebra, 49
ART. II. Sumar Quantidades Algebraicas, 52
ART. III. Reſtar Quantidades Algebraicas, 55
ART. IV. Multiplicar una Quãtidad Algebraica por otra, 57
ART. V. Dividir Quantidades Algebraicas, 62
CAP. V. De las Fracciones Comunes, aſsi Numericas, como Algebraicas, 73
ART. I. Explicaſe que coſa ſea Fraccion, y ſu Valor, *ibid.*
ART. II. De la Reduccion de las Fracciones à otras Expreſsiones, 77
ART. III. De las quatro Reglas Arithmeticas por Fracciones Comunes, 82
CAP. VI. De las Fracciones Decimales, 90
ART. I. Explicanſe las Fracciones Decimales, y ſu Formacion, *ibid.*
ART. II. De las quatro Operaciones Arithmeticas por las Fracciones Decimales, 95
CAP. VII. De las Razones, y Proporciones, 106
ART. I. De las Razones, y ſus diferentes Eſpecies, *ibid.*
ART. II. De las Proporciones en Comun, 110
ART. III. Theoremas Fundamentales ſobre las Proporciones Geometricas, 113
ART. IV. De la Proporcion de los Extremos por la igualdad de las Razones intermedias, 123
ART. V. De las Reglas de Proporcion Arithmetica, 128
ART. VI. De las Reglas de Proporcion Geometrica, 131
CAP. VIII. De la Regla de Tres, 136
Regla de Tres Directa Simple, 137
Regla de Tres Directa Compueſta, 140
Regla de Tres Inverſa Simple, 145.

INDICE.

Regla de Tres Inverſa Compueſta, 146
CAP. IX. De algunas Aplicaciones de la Regla de Tres, 148
Reglas de Interés, 149
Regla de Interés Simple, *ibid.*
Regla de Interés Compueſto, 154
Reglas de Compañia, 156
Regla de Compañia ſin Tiempo, 157
Regla de Compañia con Tiempo, 159
Reglas de Falſa Poſicion, 162
Regla de Falſa Poſicion Simple, *ibid.*
Regla de Falſa Poſicion Doble, 164
Reglas de Alligacion, 167
Alligacion Media, *ibid.*
Alligacion Alternada, 170
CAP. X. De la Compoſicion de Razones, 178
ART. I. Explicaſe la Compoſicion de Razones, *ibid.*
ART. II. De las quatro Operaciones Arithmeticas con las Razones, 182
CAP. XI. De las Potencias, ò Elevacion de las Quantidades, 191
ART. I. De las Potencias de Quantidades Simples, *ibid.*
ART. II. De las Potencias de Quantidades Compueſtas, 198
CAP. XII. De la Extraccion de Raices de Quantidades Algebraicas, 208
ART. I. De la Extraccion de Raices de Quantidades Algebraicas Simples, *ibid.*
ART. II. De la Extraccion de Raices de Quantidades Algebraicas Compueſtas, 215
Regla General para ſacar qualquier eſpecie de Raices de Quantidades Algebraicas Compueſtas, 217
Aplicacion de la Regla General à la Extraccion de Raices Quadradas, 218
Aplicacion de la Regla General à la Extraccion de Raices Cubicas, 221
CAP. XIII. De la Extraccion de Raices de Quantidades Numericas, 224
ART. I. Regla General para la Extraccion de qualquier genero de Raices de Quantidades Numericas, *ibid.*
ART. II. Aplicacion de la Regla General à la Extraccion de Raices Quadradas, 227
ART. III. Aplicacion de la Regla General à la Extraccion de Raices Cubicas, 231
CAP. XIV. Del Calculo de las Quantidades Radicales, 235
Reduccion de Quantidades Radicales, 238
Las Operaciones Arithmeticas con las Quantidades Radicales, 242
CAP. XV. De la Progreſsion Arithmetica, 245
CAP. XVI. De la Progreſsion Geometrica, 251
CAP. XVII. De la Proporcion, y Progreſsion Harmonica, 258
CAP. XVIII. De los Logarithmos en Comun, 263

INDICE.

CAP. XIX. Syſtema de los Logarithmos de Briggs, 273
ART. I. Propriedades generales de eſtos Logarithmos, *ibid.*
ART. II. De algunas coſas, que ſe ofrecen en la practica de los Logarithmos de Briggs, 280
ART. III. De la Arithmetica Logarithmica, 288
Arithmetica Logarithmica de los Enteros, 289
Arithmetica Logarithmica de las Fracciones Comunes, y Decimales, 294
CAP. XX. De los Logarithmos Hyperbolicos, 296
Su Formacion, *ibid.*
Practica de los Logarithmos Hyperbolicos, 303
Tabla de los Logarithmos Hyperbolicos, 308

ELEMEN-

ELEMENTOS GENERALES
DE ARITHMETICA,
Y
DE ALGEBRA.

PROEMIO.

A *Mathematica* en comun es una Ciencia, que trata de la *Magnitud*, y *Extenſion*. Por nombre de *Magnitud* ſe entiende todo aquello, que es capaz de aumento, y diminucion, eſto es, que añadiendoſele algo de la miſma eſpecie, ſe aumenta, y quitandoſele algo, ſe diſminuye. Aſſi una linea, un cuerpo, un eſpacio, un movimiento, una fuerza es magnitud.

Toda Magnitud ſe puede comparar con otra de la miſma eſpecie, eſto es, linea con linea, cuerpo con cuerpo, eſpacio con eſpacio; y por conſiguiente le es igual, mayor, ò menor, y ſolo por eſte cotejo con otra, como medida, podemos llegar à co-

nocer ſu *quantidad*, ò *quan grande ſea*. Aſſi para conſiderar el eſpacio de tiempo, que llamamos *hora*, lo cotejamos con otro eſpacio de tiempo mas breve, que llamamos *minuto*; y ſegun el eſpacio de tiempo dado contiene mas, ò menos minutos, decimos, que es *mayor*, ò *menor*. Si la quantidad, ò magnitud, que medimos, es preciſamente igual à la que tomamos por medida, ſe llama *Unidad*, ò *uno*: ſi la contiene dos, ò mas veces, ſe llama *Numero*, como *dos*, *tres*, &c. Pero ſi la quantidad, que cotejamos, es menor que ſu medida, entonces dividimos la medida en partes iguales, y conſideramos quantas de eſtas partes contiene, y eſto es lo que llamamos *Numero Quebrado*, ò *Fraccion*.

Las quantidades en la Mathematica ſe exprimen por ciertos châractéres, lineas, ò figuras. Pero como en eſtas quantidades ſe puede conſiderar, *quantas* ſean, ò ſu *numero*, y *quan grandes* ſean, de ahí nace la diviſion de la Mathematica en dos partes, que ſon *Arithmetica*, ò *Calculo*, y *Geometría*. La Arithmetica da reglas para encontrar, y combinar ſu *numero*; y la Geometría ſu *magnitud*, y *extenſion*; y de eſtas dos partes, aplicadas à diferentes materias, reſultan los otros Tratados, como *Mechânica*, *Optica*, *Aſtronomía*, *Nautica*, *&c.*

La

La Mathematica procede por *Definiciones*, esto es, explicaciones claras, y limpias del sugeto, de que se trata, ò termino, de que se sirve: por *Postulados*, ò *Hypotheses*, que son la suposicion de una cosa possible: por *Axîomas*, que son verdades patentes, de que nadie puede dudar. De ahí passa à las *Proposiciones*. De estas hai de dos suertes, unas que llaman *Theoremas*, que son proposiciones, que exponen las propriedades, y perfecciones de una cosa, otras que llaman *Problemas*, que muestran como se ha de hacer la cosa, y reducen à la practica la Theorica ya demonstrada.

Estas Proposiciones las prueba la Mathematica por *Demonstracion*, que es decir *prueba evidente*, que claramente se deduce immediatamente de los Axîomas, ò de otras Proposiciones ya demonstradas. Se sirve la Mathematica de *Lemmas*, que son unas proposiciones adelantadas, que allanan el passo para otra Proposicion, que es la principal, que se intenta demonstrar: usa de *Corollarios*, que son consequencias, que nacen de la Proposicion demonstrada: remata finalmente con *Escolios*, que ilustran lo ya demonstrado, ò resumen quanto se ha dicho.

Los principales Axîomas, de que se sirve la Mathematica para sacar de ahí sus demonstraciones son los siguientes.

AXIOMAS.

1°. *El todo es mayor, que ninguna de ſus partes.*

2°. *El todo es igual à todas ſus partes juntas, por conſiguiente todas las partes juntas de un todo ſon iguales al todo.*

3°. *Si à quantidades iguales ſe añaden partes iguales, los todos que reſultan ſon iguales.*

4°. *Si à quantidades iguales ſe añaden partes desiguales entre sí, los todos que reſulten ſon entre sí desiguales.*

5°. *Si de quantidades iguales ſe quitan partes iguales, las que quedan ſon entre sí iguales.*

6°. *Si de quantidades iguales ſe quitan partes desiguales, las que quedan ſon deſiguales.*

7°. *Las quantidades ſon iguales entre sí, ſi ſon entrambas iguales à una otra quantidad.*

8°. *Los duplos, los triplos de quantidades iguales ſon tambien entre sí iguales; por conſiguiente las mitades, los tercios, y quartas partes, &c. de quantidades iguales ſon tambien entre sí iguales.*

Sobre eſtos principios en sí tan evidentes eſtá fundada la grande Facultad, y Ciencia de las Mathematicas.

CAPI-

CAPITULO PRIMERO.

De la Diferencia entre la Arithmetica, y Algebra.

1 LA *Arithmetica es una Ciencia, que trata de los Numeros*, esto es, da Reglas para inferir unas quantidades de otras. Y como todo lo que se suele buscar en los Numeros, ò quantidades, se reduce à ver, dos, ò muchas quantidades juntas *quanto hacen*? quitada una quantidad de otra, *que quantidad es la que queda*? una quantidad muchas veces tomada *à quanto sube*? una quantidad dividida entre muchos, *quanto le corresponde à cada uno*? Por esso todas sus Reglas se reducen à quatro, que son *Sumar*, *Restar*, *Multiplicar*, y *Partir*.

2 Pero para tratar la Arithmetica de essos Numeros, ò quantidades, es menester, que tenga algunas *expressiones*, ò *señales*, que los expriman; y para esto tiene dos especies de expressiones, las unas *determinadas*, esto es, que exprimen un numero determinado, otras indeterminadas, y *universales*, que son indiferentes para significar qualquier numero, y quantidad, y con las quales hace sus operacio-

raciones *universales*, esto es, verdaderas en qualquier numero, y quantidad particular, que se las quiera hacer significar. De las primeras tiene unicamente diez, que son los que comunmente llamamos *Numeros* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y con ellos, y con su diferente disposicion se puede significar, y exprimir qualquier numero finito possible: las segundas son comunmente las letras del Alphabeto Latino, ò Griego, y tal vez tambien del Hebreo.

3 Y en efecto, que yo exprima el *numero de tres* con esta expression 3, ò con esta otra *a*, una vez que convengamos, que esta expression *a* en estas circunstancias quiere decir *tres*, lo mismo es. La parte de la Arithmetica, que se sirve para sus operaciones de las expressiones determinadas 0, 1, 2, &c. se llama simplemente *Arithmetica*, y sus expressiones, de que se sirve, *Numeros*, ò *Châractéres Arithmeticos*. La parte que se sirve de las expressiones universales, è indeterminadas *a*, *b*, *c*, *&c.* se llama *Algebra*, ò *Arithmetica Universal*, pero entrambas se fundan en unos mismos principios, aunque el modo de obrar es algo diferente el uno del otro; el del Algebra es mas facil, y expedito, porque no está atado à tantas leyes, y circunstancias, el de la Arithmetica es mas dificil, y penoso.

No

4 No ſolo tienen la Arithmetica, y Algebra expreſſiones para ſignificar las quantidades, ſino tambien que de acuerdo univerſal de todos los Mathematicos para lograr la brevedad, tiene otros *ſignos* para exprimir las operaciones, y la razon, que las quantidades tienen entre sí, los quales ſeñales facilmente ſe aprenden por el uſo; los mas frequentes ſon

$=, \succ, \prec, +, -, \times, :, \surd, ::, \backsim, \infty, \div, \dot{-}, \pm.$

Para ſignificar, que una quantidad es igual à otra, uſa de eſta ſeñal $=$, que quiere decir es *igual*, ò *que es igual*. Aſſi $a = b$, que quiere decir, que la quantidad expreſſada por eſta letra a es igual à la quantidad expreſſada por b, y en general el agregado de todas las quantidades, y terminos, que eſtán en la una parte, es igual al agregado de quantidades, y terminos, que eſtán en la otra. Aſſi $a + b = c - d$ ſignifica, que la ſuma de a, y de b es *igual* à la diferencia de c à d.

5 Para ſignificar, que una quantidad es mayor, que otra, uſa de eſta ſeñal $\succ$, de manera que la quantidad, que eſtá en la parte abierta, es *mayor*, y la que eſtá en la punta, es *menor*. Aſſi $a \succ b$ ſignifica, que a es mayor que b. Eſta ſeñal $+$ ſignifica *plus*, ò *mas*, y ſirve para denotar, que la quantidad, que le ſigue, ſe ha de tomar, como *junta*, ò *añadida*

dida à las otras, de quienes eſte ſigno la ſepara, ò mas breve ſignifica *la ſuma* de ellas. Aſſi 4 + 3 ſignifica 3 *añadido* à 4, eſto es 7. Eſta otra ſeñal — ſignifica *minus*, ò *menos*, è indica, que la quantidad, que ſe le ſigue, ſe ha de quitar de las otras, que la acompañan, ò la *diferencia* de entrambas. Por lo tanto *a* — *b*, quiere decir, que de *a* ſe ha de quitar *b*, por conſiguiente ſignificará ſolo la *diferencia* entre *a*, y *b*. Aſſi 4 — 3 = 1.

6 Eſta ſeñal × ſignifica, que las quantidades entre quienes eſtá, ſe han de tomar como *multiplicadas entre sí*, eſto es, ſu producto, ò el todo, que reſulta de la multiplicacion de entrambas, por lo qual 3 × 7 = 21. Algunas veces en lugar de × ſe ſirven, para indicar la miſma multiplicacion, de un puntico entre las dos quantidades (.). Por lo tanto 3 × 7 = 3 . 7; pero eſte puntico en quantidades numericas eſtá expueſto à que indique *Decimales*, y aſſi no lo uſarémos para ſemejante multiplicacion. Pero ſi las quantidades ſon algebraicas, y ſimples, eſto es, que no conſten de muchos terminos ſeparados entre sí por los ſeñales +, —, ſe ſuele omitir la ſeñal de multiplicacion, por lo tanto *a* × *b* = *a* . *b* = *ab*.

7 Para indicar la diviſion ſe eſcribe una quantidad ſobre la otra, ſeparandolas por una linita, poniendo encima *la que ſe divide*, y baxo

baxo aquella *por quien ſe divide*. Aſſi $\frac{10}{8}$ ſignifica el *Quociente*, que reſulta de la diviſion de 10 por 8, $\frac{a}{b}$ el Quociente, que reſulta partiendo *a* por *b*. Otros ponen las dos quantidades ſeguidas, primero la que ſe divide, y deſpues aquella por la qual ſe divide, ſeparandolas entrambas por dos punticos, por lo tanto $\frac{12}{4} = 12 : 4 = 3$. Para ſignificar, que una quantidad *ſe aſſemeja* à la otra, uſan de una *S* à la larga entre las dos, aſſi $a \backsim b$. Finalmente para ſignificar una quantidad *infinita*, uſan de eſta ſeñal ∞.

CAPITULO II.

Propriedades, y Valor de los Numeros.

8 POR nombre de *Numeros* entendemos aquí la unidad 1, el complexo de muchas unidades, como 2, 3, 4, &c. ò alguna parte de la unidad, como $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}$, &c. A la unidad, ò al complexo de muchas unidades, llamamos *Enteros*, ò un *Todo*, à las partes de la unidad llamamos *Quebrado*, ò *Fraccion*. De ahí viene la 1ª. diviſion de los Numeros en *Enteros*, y *Quebrados*. Pero lo que es un *entero* reſpecto de una denominacion,

cion, es *quebrado* reſpecto de otra. Aſſi un *pie* es un entero reſpecto de pie, pero un quebrado, ò $\frac{1}{3}$ reſpecto de *vara*. Pero ſi el numero conſta de entero, y quebrado, como $5\frac{1}{2}$, ſe llama *Mixto* de entrambos.

9 La 2ª. diviſion de los *Numeros* es en *Par*, è *Impar*. Numero par es el que exâctamente, y ſin reſta ſe puede dividir por 2, como 4, 6, &c. Numéro impar es el que difiere de una unidad del numero par, como 1, 3, 5, &c. Un numero, ò quantidad ſe dice, que *mide* al otro, ò que es ſu *medida*, quando ſe contiene exâctamente en él una, ò muchas veces ſin reſta, ò lo que es lo miſmo, quando dividido el otro por eſte, el quociente es un numero entero. Aſſi 2 mide à 6, porque 2 ſe contiene exâctamente en 6 *tres* veces, pero no es medida de 7. El numero, que aſſi contiene al otro *muchas veces* ſe llama ſu *Multiplo*, ò *Multiplice*, y el numero aſſi contenido en el otro muchas veces es ſu parte *aliquota*, ò ſu *ſubmultiplo*.

10 Quando dos, ò mas Numeros ſe pueden medir por una miſma medida, ſe llaman *Commenſurables entre ſí*, y el numero, que los mide ſe llama ſu *Comun medida*. Aſſi 6, y 9 ſon entre ſí commenſurables, porque à entrambos los mide 3. Pero como muchos numeros, à mas de tener una comun medida, pueden tambien tener otra, el *numero mayor*,

que

que los mide à entrambos, es ſu *mayor comun medida.* Aſſi 12, y 8 tienen por comunes medidas à 2, y 4, pero 4 es ſu mayor comun medida. Todo numero entero es commenſurable con la unidad, porque eſta, una vez tomada, ſe mide à sí, y tomada muchas veces mide al otro. Si dos numeros, como 5, y 7 no tienen otra comun medida, que la unidad, ſe llaman *primeros entre sí*; pero ſi à mas de la unidad, tienen tambien otra comun medida, ſon *entre sí compueſtos.*

11 Por lo tanto Numero *primero en sí* es el que no tiene otra medida, que la unidad, como 5, 7, 11, &c. Numero *compueſto en sí* es el que à mas de tener por medida la unidad, le mide tambien otro numero, como 6, que tiene por medida à mas de la unidad, tambien à 2, 3. Numero *Racional* es aquel, cuya razon con la unidad ſe puede exprimir con *finito* numero de cifras, ò châractéres. Y aſſi es numero racional todo numero entero, quebrado, ò mixto, que ſe pueda *exâctamente* exprimir con determinado, è finito numero de cifras; porque él miſmo exprime ſu razon con la unidad. Al contrario numero *Irracional* es aquel, cuya razon con la unidad no ſe puede aſſi *exâctamente* exprimir. Eſtos numeros Irracionales ſe llaman tambien *Surdos.* Que coſa ſea *Razon*, lo explicarémos deſpues.

En

12 En orden al *valor*, y *ſignificacion* de los Numeros 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, tomados ſeparadamente todo el Mundo los ſabe, 1 ſignifica *uno*, 2 *dos*, &c. Solo el 0 ſeparadamente, y por sí no tiene ſignificacion alguna, mas junto con otro numero, aunque en sí tampoco entonces ſignifique, ni tenga valor, *aumenta de diez el valor del numero, que le precede*, menos en las Fracciones Decimales, que lo *diſminuye*, como verémos. Aſſi 2 ſolo, ſignifica dos *unidades*, pero ſi le ſigue 0, como 20, ſignificará *dos*, pero eſtos ſerán *decenas* de unidades, ſi ſe le ſiguen dos ceros, ſignificará *centenas*, *&c.* Los demás numeros tomados muchos juntos entre sí, y formando una miſma quantidad, à mas del valor determinado, que tienen por sí, *realzarán eſte por el pueſto, y orden en que eſtán, creciendo ſiempre en la proporcion decupla*, comenzando deſde la cifra de las unidades ácia la izquierda.

13 Por lo tanto en eſta partida 368, el 8 por ſer el *primero* ſignifica ſolo ocho *unidades*, el 6 como es el *ſegundo*, ſignificará tambien *ſeis*, pero eſtos ſerán *decenas* de unidades, el 3 ſignifica *tres*, pero ſon *centenas*, ò tres cientos; con que juntos ſignificarán treſcientos ſeſenta y ocho. Si antes del 3 hubieſſe otro, ſignificaria ya eſte otro *miles*, ſi otro, *decenas* de miles, &c. como ſe ve en eſta

esta Tabla, en la qual se exprime el valor, que toman los numeros por el *puesto, orden, y distancia*, que tienen de la cifra de las unidades ácia la izquierda.

&c.	Billones.	Cent. de Mill. de Millones.	Dec. de Mill. de Millones.	Millares de Millones.	Centenas de Millones.	Decenas de Millones.	Millones, ò Cuentos.	Centenas de Millares.	Decenas de Millares.	Millares.	Centenas.	Decenas.	Unidades.
	5,	7	8	4,	6	3	2,	5	1	9,	6	5	3
	Periodo de Billones.		P. de Mill. de Millon.		Periodo de Millones.			Periodo de Millares.			Periodo de Unidades.		

14 Assi para leer qualquiera quantidad, como la precedente, separo los numeros en periodos de tres en tres, comenzando desde la derecha ácia la izquierda, el primer periodo será el de las *unidades*, que es decir, que la primera cifra desde la derecha (3) significará tres *unidades*, la segunda (5) cinco decenas de *unidades*, y la tercera (6) seis centenas de *unidades*. El segundo periodo 519 será de los *millares*, el 9 significará nueve *mil*, el 1 una decena de *Millares*, y la tercera 5 cinco centenas de *Millares*, y las tres juntas *quinientos y diez y nueve mil*. El tercer periodo 632 será el de los *Millones*, ò Cuentos,

tos, y serán *seiscientos treinta y dos Millones.* El quarto periodo 784 será el de los *Millares de Millones*, que serán *setecientos ochenta y quatro Millares de Millones.* El quinto periodo 5 será de los *Billones*, y como no hai sino un numero significará solo *unidades* de Billones. Comenzando pues à leer desde la izquierda, como se acostumbra, toda la partida se reducirá à 5 Billones, 784 Millares de Millones, 632 Millones, 519 mil, 653 unidades.

CAPITULO III.

De las quatro Reglas fundamentales de la Arithmetica.

15 COmo el fin principal de la Arithmetica es, de unas quantidades dadas, y conocidas encontrar otras, que se buscan, como su *Suma*, su *Diferencia*, su *Producto*, su *Quociente*, y entre estas quantidades dadas hai unas *simples*, y de una sola especie entre sí, que llamamos *Simples*, ò *Enteros*, y otras *Mixtas*, y de diferentes especies, que se componen de varias suertes de cosas, pero que las unas se contienen en las otras,

otras, y ſon ſus partes, ò ſus quebrados, como *libras*, *ſueldos*, y *dineros*, *varas*, *pies*, y *pulgadas*, &c. Por eſſo enſeñarémos eſtas Reglas, ya para el caſo, en que las quantidades dadas ſean todas de una miſma eſpecie, ò ſolos enteros, ya tambien para el caſo, en que todas, ò à lo menos algunas ſean mixtas.

ARTICULO PRIMERO.

Sumar quantidades Enteras, y Mixtas.

16 SUmar no es otra coſa, que *juntar en una muchas quantidades, ò partidas dadas*; y la que de eſta junta reſulte, ſe llama *Suma*, ò *Total*. Para ſumar muchas partidas *Simples*, ò *Enteros*, tomeſe la Regla ſiguiente.

Regla 1ª. *Eſcribaſe una partida baxo la otra, de manera que las Unidades eſtén directamente baxo las Unidades, las Decenas baxo las Decenas, &c. Tireſe una linea baxo todas las partidas, y comenzando de la derecha ácia la izquierda, tomeſe la ſuma de todas las Unidades, deſpues la de las Decenas, deſpues la de las Centenas, &c. ponganſe eſtas ſumas baxo la linea, y eſta partida ſerá la Suma total.*

EXEM-

EXEMPLOS.

(*A*)	723	(*B*)	1563
	245		841
	1		3456
Suma	969	*Suma*	5860

	3680		5060
	465		56
	327		4380
Suma	4472	*Suma*	9496

17 Aſſi en la primera columna de (*A*) digo 3, y 5 ſon 8, y 1 ſon 9, lo que eſcribo baxo la columna de las Unidades, porque la tal columna es de Unidades. Paſſo à la ſegunda 2, y 4 ſon 6, que pongo baxo la columna de Decenas. Paſſo à la tercera 7, y 2 ſon 9, que ſon Centenas, pues la *Suma total* es 969. La razon de eſta operacion es, porque el todo, ò ſuma total no es otra coſa, que todas las partes juntas, y aſſi el total no ſerá otra coſa, que la ſuma de todas las Unidades, la ſuma de todas las Decenas, de todas las Centenas, &c. las quales he juntado en la linea inferior.

18 Regla 2ª. *Si la Suma de una columna paſſa de 9, eſto es, contiene Decenas, y Unidades, ò à lo menos Decenas, ponganſe unicamente*

camente las Unidades, ſi las hai, baxo eſta columna, y ſino las hai, pongaſe 0, *y guardenſe las Decenas, que juntarémos con la columna ſiguiente.*

Hayanſe de ſumar eſtas partidas 1563, 841, 3456, las que eſcribo como en el Exemplo, y digo 3, y 1 ſon 4, y 6 ſon 10: como en 10 hai una Decena, y ninguna Unidad mas, pongo 0 baxo la columna, que ſumo, y la 1 *decena* la junto à la columna ſiguiente, diciendo 1, (que llevo) y 6 ſon 7, y 4 ſon 11, y 5 ſon 16: como en 16 hai una Decena, y ſeis Unidades, pongo eſtas unidades (6), guardando ſiempre las decenas para la columna ſiguiente, y proſigo de eſta miſma ſuerte, quantas quiera columnas formen las partidas.

19 Para ſumar quantidades *Mixtas*, ò que conſten de diferentes eſpecies, tomeſe la Regla ſiguiente.

Regla. *Eſcribanſe las quantidades, una debaxo la otra, de manera que las de una miſma eſpecie formen todas una miſma columna. Tireſe baxo una linea. Comienceſe deſde la derecha, y ſumeſe eſta eſpecie. Si eſta ſuma hicieſſe una, ò muchas unidades de la eſpecie, que hai en la columna ſiguiente ácia la izquierda, juntenſe eſtas unidades con las de la columna ſiguiente, y ſi no, pongaſe la miſma ſuma baxo la columna, en quien ſe obra. Ha-*

gaſe lo miſmo en las otras columnas, que ſe ſiguen, y la partida, que reſulte, ſerá la Suma total.

EXEMPLO.

En libras, ſueldos, y dineros.

(*A*)	56l.	18ſ.	10d.
	43	15	4
	3	0	8
Suma	103	14	10

EXEMPLO.

En varas, pies, y pulgadas.

	38v.	2p.	11pulg.
	56	1	10
	4	2	5
Suma	100	1	2

20 Como en una libra hai 20 *ſueldos*, en el ſueldo 12 *dineros*, *comienzo ſiempre por la columna de eſpecies inferiores*, en (*A*) 10, y 4 ſon 14, y 8 ſon 22, que ſon *dineros*: como en 22 dineros hai 1 *ſueldo*, y 10 *dineros*, pongo baxo la columna de *dineros* los 10, y el 1 *ſueldo*, que es una unidad de las eſpecies de la columna ſiguiente, lo junto con la columna, que ſe ſigue, y digo 1, y 8 ſon 9, y 5 ſon

ſon 14, pongo el 4, y llevo 1, y 1, y 1 ſon 3, que junto al 4 harian 34 ſueldos, pero como eſta quantidad es una libra, y 14 ſueldos, pongo ſolo los 14 *ſueldos*, y guardo la 1 *libra* para la *columna* de libras, que ſumandolas ſon 103. Lo miſmo ſe hace en qualeſquiera peſos, monedas, medidás, &c. teniendo preſente, que de las eſpecies inferiores, como partes, ſe forman las ſuperiores.

Si ſe hubieſſe de juntar una quantidad muchas veces à sí miſma, mas brevemente ſe hace por la *Multiplicacion*, como verémos.

ARTICULO II.

Reſtar una quantidad de otra.

21 RESTAR es *quitar una quantidad menor de otra mayor, para encontrar el exceſſo de la mayor ſobre la menor, ò la diferencia de entrambas.* La quantidad, que queda, ſacada la menor de la mayor, es, y ſe llama *Reſta*, *Diferencia*, ò *Reſiduo*. Para quitar una quantidad de otra, tomeſe la Regla ſiguiente.

Regla. *Eſcribaſe la menor baxo la mayor, de manera que correſpondan Unidades con Unidades, Decenas con Decenas, &c. Tireſe*

despues una linea: saquense las unidades de la quantidad de abaxo de las unidades de la quantidad de arriba, y pongase su diferencia baxo la columna de las unidades. Passese despues à la columna de Decenas, hagase lo mismo, y lo mismo en las columnas siguientes. Y la suma de unidades, decenas, &c. que quedan, es la Diferencia de una quantidad à la otra. Porque quitando de una suma (qual es la quantidad mayor) una de sus partes (qual es la quantidad menor), la que queda, será la otra parte, que es la Diferencia, ò exceſſo, con que la mayor excede la menor, ò el todo à la parte.

EXEMPLOS.

(*A*)	4683	(*B*)	7046
	3450		2879
Reſta	1233	*Reſta*	4167

22 Hayase de quitar 3450 de 4683, las pongo como en el Exemplo (*A*), y comenzando desde las unidades, digo de 3 quien quita 0, quedan 3, que pongo abaxo, prosigo, de 8 quito 5, quedan 3, que pongo tambien directamente baxo la columna, que resto, de 6 quito 4, quedan 2, finalmente de 4 quito 3, queda 1, pues la *Diferencia* de entrambas quantidades dadas es 1233.

23 *Si las unidades* (lo mismo digo de las

las *decenas, &c.*) *del numero de abaxo fueſſen mas, que las del numero de arriba, tomo una decena del numero antecedente de arriba, y eſta decena la junto con las unidades del numero de arriba, y de la ſuma quito las unidades del numero de abaxo.* Si la immediata antecedente fueſſe 0, quitola de la otra, que ſe ſigue deſpues, y eſte 0, y quantos ceros ſe le ſiguieſſen immediatamente, valdrán cada uno 9; pero quando llegue à la cifra, de quien he quitado 1 *decena*, tengo de tener preſente, que falta 1, que ya he quitado, y aſſi la tal cifra ſupone por uno menos.

24 Hayanſe de quitar 2879 de 7046. (*B*) Digo pues, como en 6 no hai baſtantes unidades, para quitar de ellas 9, tomo una decena de la columna antecedente, que junta al 6 hacen 16, de quien quitando 9 quedan 7. Paſſo à la ſegunda columna, en donde advierto, que del 4 ya he quitado 1, por conſiguiente ya no quedan mas que 3, que no ſon baſtantes para que de ellos ſe quiten 7, pues tomo una decena de la columna, que ſe ſigue; pero reparo, que la cifra ſiguiente es 0, pues la conſidero como tomada de la columna ſiguiente, es à ſaber del 7, pues de 13 quito 7 quedan 6. Paſſo à la otra, en que encuentro el 0, que junto con el 1, que habia quitado del 7 hacia 10, pero de eſte 10 ya habia quitado 1, y aſſi no quedan ſino 9, de quien

quien quitando 8, queda 1. Paſſo al 7, de quien por haber ſacado 1, quedan 6, del qual quitando 2, quedan 4. Pues la Reſta es 4167.

25 Si las quantidades, que ſe han de reſtar, fueſſen mixtas de diferentes generos, como de *libras*, *ſueldos*, y *dineros*, la operacion ſe hace de la miſma ſuerte, y ſe ponen las partidas como en el ſumar dichas quantidades, poniendo baxo aquella, en que la *eſpecie ſuperior* es menor, correſpondiendo libras à libras, ſueldos à ſueldos, &c. Y ſi en la partida ſuperior no hubieſſe baſtante para quitar de ella la inferior, ſe toma una unidad de la eſpecie immediata ſiguiente, que reducida à la miſma eſpecie inferior, y junta con las de la tal eſpecie, darán una ſuma, de quien ſe podrá ſaçar la partida inferior. Aſſi:

EXEMPLOS.

	35 l.	16 ſ.	3 d.
	4	17	8
Reſta	30	18	7

	35 v.	1 p.	8 pulg.
	24	2	2
Reſta	10	2	6

Comenzando por la eſpecie inferior: en 3 no hai baſtante, para que de ello ſe quite 8, pues tomo 1 *ſueldo* de la columna ſiguiente, y conſiderando, que 1 ſueldo es 12 dineros, los junto con los 3, y tengo 15 dineros, de quien ſacando 8, quedan 7. Paſſo à la columna

na de los *ſueldos*, en la qual por haber quitado 1, no quedan ſino 15, que no ſon baſtantes, para que de ellos ſe quiten 17, pues tomo 1 *libra* de la columna ſiguiente, que es 20 ſueldos, los quales juntos à los 15 ſon 35, de quien quitando 17, quedan 18, y aſſi de los demás. Del miſmo modo nos hemos de valer en el *Reſtar* qualeſquiera quantidades mixtas.

26 Las Reglas de *Sumar*, y *Reſtar* tienen tanta correlacion entre sí, que la una prueba la otra, pues la una *junta*, lo que la otra *ſepara*. Para probar ſi la *Suma* eſtá bien hecha, quiteſe del total una de las partidas ſumadas, y la diferencia debe ſer la otra, ò la ſuma de las demás, ſi hai mas de dos. Si no ſale aſſi, la operacion eſtá mal hecha. Aſſimiſmo para probar ſi la *Reſta* eſtá bien hecha, ſumenſe la partida *menor*, y la *diferencia*, la ſuma de entrambas debe ſer la partida mayor, para ir bien, y eſta es la prueba mas natural, y liſa.

ARTI-

ARTICULO III.

Multiplicar una quantidad por otra.

27 *Multiplicar* una quantidad por otra no es otra coſa, que *tomar dicha quantidad tantas veces, quantas unidades hai en la otra.* Aſſi multiplicar 3 por 2 no es otra coſa, que tomar 3 *dos* veces. La quantidad, que ſe debe multiplicar ſe llama el *Multiplicando*, aquella por la qual ſe debe multiplicar, ſe llama el *Multiplicador*, y la quantidad, que reſulta de tomar el Multiplicando tantas veces, quantas unidades contiene el Multiplicador, ſe llama el *Producto.* El Multiplicando, y el Multiplicador ſon *Factores*, y *Raices* del Producto.

28 Como el *Producto* es el *Multiplicando tantas veces tomado, quantas unidades contiene el Multiplicador*, ſe ſigue 1°. Que el Producto contiene tantas veces al Multiplicando, quantas el Multiplicador contiene la unidad, ò en otros terminos, la unidad es la miſma parte del Multiplicador, que el Multiplicando del Producto, que explican los Mathematicos diciendo, *la miſma razon, que tiene la unidad al Multiplicador,*

cador, tiene el Multiplicando al Producto: 2º. Que ſi ſe eſcribieſſe el Multiplicando tantas veces, como unidades contiene el Multiplicador, y ſe ſumaſſen eſſas partidas, la *ſuma* de todas ſería igual al *Producto* del Multiplicando por el Multiplicador: de donde el *Multiplicar es un modo abreviado de ſumar.*

29 Si vuelvo las veces, y lo que es Multiplicando lo hago Multiplicador, y al Multiplicador lo hago Multiplicando, eſto es, en vez de multiplicar 3 por 2, multiplico 2 por 3, el Producto 6 me ſerá el miſmo. De donde *ſi tengo dos partidas qualeſquiera para multiplicar entre sí, puedo indiferentemente tomar qualquiera de ellas por Multiplicando, con tal que tome la otra por Multiplicador, y el Producto ſerá el miſmo.*

30 Quando ni el Multiplicando, ni el Multiplicador llegan à 10, eſto es, ſe exprimen por una ſola cifra, como 2, 3, &c. no hai regla particular para multiplicarlos entre sí; baſta ſaber de memoria eſta Tabla, que es tambien del todo neceſſaria para hacer qualquiera multiplicacion de qualquiera quantidad numerica, y podrá ſervir para la diviſion; pues, como verémos, el Producto dividido por un factor da por Quociente el otro.

TABLA

TABLA DE MULTIPLICACION, Y DIVISION.

Factores.	Producto.	Factores.	Producto.	Factores.	Producto.
2 × 2 =	4	5 × 2 =	10	8 × 2 =	16
2 × 3 =	6	5 × 3 =	15	8 × 3 =	24
2 × 4 =	8	5 × 4 =	20	8 × 4 =	32
2 × 5 =	10	5 × 5 =	25	8 × 5 =	40
2 × 6 =	12	5 × 6 =	30	8 × 6 =	48
2 × 7 =	14	5 × 7 =	35	8 × 7 =	56
2 × 8 =	16	5 × 8 =	40	8 × 8 =	64
2 × 9 =	18	5 × 9 =	45	8 × 9 =	72
2 × 10 =	20	5 × 10 =	50	8 × 10 =	80
3 × 2 =	6	6 × 2 =	12	9 × 2 =	18
3 × 3 =	9	6 × 3 =	18	9 × 3 =	27
3 × 4 =	12	6 × 4 =	24	9 × 4 =	36
3 × 5 =	15	6 × 5 =	30	9 × 5 =	45
3 × 6 =	18	6 × 6 =	36	9 × 6 =	54
3 × 7 =	21	6 × 7 =	42	9 × 7 =	63
3 × 8 =	24	6 × 8 =	48	9 × 8 =	72
3 × 9 =	27	6 × 9 =	54	9 × 9 =	81
3 × 10 =	30	6 × 10 =	60	9 × 10 =	90
4 × 2 =	8	7 × 2 =	14	10 × 2 =	20
4 × 3 =	12	7 × 3 =	21	10 × 3 =	30
4 × 4 =	16	7 × 4 =	28	10 × 4 =	40
4 × 5 =	20	7 × 5 =	35	10 × 5 =	50
4 × 6 =	24	7 × 6 =	42	10 × 6 =	60
4 × 7 =	28	7 × 7 =	49	10 × 7 =	70
4 × 8 =	32	7 × 8 =	56	10 × 8 =	80
4 × 9 =	36	7 × 9 =	63	10 × 9 =	90
4 × 10 =	40	7 × 10 =	70	10 × 10 =	100
Factores.	Dividendo.	Factores.	Dividendo.	Factores.	Dividendo.

31 Para *multiplicar quantidades enteras por enteros* tomeſe la Regla ſiguiente: *Pongaſe el Multiplicador baxo el Multiplicando, de manera que correſpondan unidades à unidades, decenas à decenas, &c. Tireſe una linea. Multipliqueſe cada cifra del Multiplicando comenzando por la ultima, por la cifra de unidades del Multiplicador, y ſu Producto, ſino llega à diez, pongaſe directamente baxo la columna de la cifra, que ſe multiplica, y ſi llega à diez, ponganſe ſolamente allí las unidades, ſi las hai, y ſi no o, y guardenſe las decenas para juntarlas al ſiguiente Producto.*

32 Hecha la primera parte de la multiplicacion, que es multiplicar todo el Multiplicando por la *cifra de unidades* del Multiplicador, paſſeſe deſpues à la ſegunda parte, que es multiplicar todo el Multiplicando por la *cifra de decenas* del Multiplicador, la qual multiplicacion ſe hace de la miſma ſuerte, que en la primera parte, ſolo que el Producto ſe comienza à poner baxo la columna de la cifra de *decenas* del Multiplicador, y ſe proſigue poniendo ácia la izquierda. De la miſma ſuerte ſi hai mas cifras en el Multiplicador, comenzando ſiempre à poner el Producto baxo la columna en que eſtá la cifra del Multiplicador, que actualmente multiplica. *Sumenſe deſpues las ſumas de los particulares Productos, como eſtán pueſtos, y la ſuma ſerá el Producto total.*

EXEM-

EXEMPLOS.

(*A*)	64	(*B*)	306
	× 3		× 24
Producto	192		1224
			612
		Producto total	7344

33 Hayanſe pues de multiplicar 64 por 3. Pueſtas las partidas como en el Exemplo, (*A*) comienzo 3×4 es 12, que es 1 *decena*, y 2 *unidades*, pongo pues baxo la columna del Multiplicador las 2 unidades, y guardo 1 decena para juntarla al ſegundo Producto; proſigo 3×6 es 18, y 1 del primer Producto es 19, como ya no hai mas cifras en el Multiplicando, pongo el 19, y tengo por Producto 192=64×3.

34 Hayanſe de Multiplicar 306 por 24. (*B*) Multiplicando todo el Multiplicando por la *cifra de unidades*, comienzo 4×6 ſon 24, que ſon 2 decenas, y 4 unidades, pongo pues baxo la columna de la cifra, por quien multiplico, las 4 unidades; proſigo 4×0 es 0, y 2 que me quedan del primer Producto, es 2, que los pongo; 4×3 ſon 12, como ya no hai mas que multiplicar en el Multiplicando, pongo los 12, y tengo hecha la primera parte de la multiplicacion.

Paſſo

Paſſo à la ſegunda parte tomando por Multiplicador la *cifra de decenas del Multiplicador* : Comienzo 2x6 ſon 12, pongo pues las 2 unidades baxo la columna de la cifra, por quien multiplico: 2x0 es 0, y 1 que me quedaba del primer Producto, es 1, lo pongo, y proſigo 2x3 es 6, lo pongo. Tengo pues hechas las dos partes de la multiplicacion, que es toda la multiplicacion, por no haber ſino dos cifras en el Multiplicador. Sumo pues ahora los Productos parciales *como eſtán*, y tengo la ſuma 7344 por Producto totál, pues 306x24=7344.

35 La prueba de eſta Regla ſe toma de la miſma naturaleza del *multiplicar*, que es tomar el Multiplicando tantas veces, quantas unidades hai en el Multiplicador. En el primer Exemplo en el Multiplicando hai unidades, y decenas de unidades, y en el Multiplicador, por no haber ſino una cifra, no hai ſino unidades, tomando las unidades del Multiplicando, y ſus decenas de unidades, tantas veces como unidades hai en el Multiplicador, ſe toma todo el Multiplicando, tantas veces como unidades hai en el Multiplicador. En el ſegundo Exemplo, en el Multiplicador hai unidades, y decenas de unidades, por la primera parte de la multiplicacion ſe toma todo el Multiplicando tantas veces, como unidades hai en el Multiplicador,

viſor, el Producto ſerá igual al Dividendo, porque eſto ſería volver à poner por la multiplicacion, lo que por la diviſion ſe habia ſacado. De ahí es, *que el mejor modo para probar, ſi la diviſion eſtá bien hecha, es multiplicar el Quociente por el Diviſor, y cotejar el Producto* (ò ſi queda algo deſpues de la diviſion, la *Suma* del Producto, y eſta reſta) *con el Dividendo.* 4º. Que el Dividendo ſe puede conſiderar como un *Producto, cuyos factores ſon el Diviſor, y el Quociente*, y aſſi dividido por uno, dará por Quociente el otro. Por lo qual una vez que tengamos un factor de una quantidad, dividiendola por él, el Quociente ſerá el otro.

38 Para dividir pues bien Numeros enteros, tomeſe la Regla ſiguiente. *Eſcribaſe la quantidad, que ſe haya de dividir, à ſu lado ácia la izquierda pongaſe el Diviſor, ſeparandolo del Dividendo con una liníta, ò parentheſis, y à la derecha tireſe otro parentheſis, que lo ſepare del lugar deſtinado al Quociente.* Eſto ſupueſto, la diviſion ſe ha de hacer por partes. *Si el Diviſor tiene una ſola cifra, comienceſe à dividir por ella la primera cifra del Dividendo, ſi es mayor, ò igual al Diviſor; pero ſi es menor, tomenſe las dos primeras cifras del Dividendo, y veaſe quantas veces eſta primera parte del Dividendo contiene al Diviſor, y eſcribaſe eſte numero de veces en el lugar deſti-*

deſtinado al Quociente, que eſta ſerá ſu primera cifra.

39 *Para ver ſi eſta diviſion eſtá bien hecha, multipliqueſe la cifra del Quociente encontrada por el Diviſor, y ſu producto pongaſe immediatamente baxo la parte del Dividendo, que ſe ha dividido, reſteſe eſte producto de la primera parte del Dividendo, y ſi queda algo, baxeſe à ſu lado la cifra, que ſe ſigue del Dividendo, que junta con dicha reſta compondrá un ſegundo miembro de la diviſion, el qual dividido por el Diviſor, como el primero, dará por Quociente la ſegunda cifra, de que conſte el Quociente total; y proſigaſe de la miſma ſuerte, que en el primer caſo, haſta que ſe hayan baxado todas las cifras del Dividendo.*

EXEMPLOS.

3) 456 | 152
3
15
15
06
6
0

4) 159 | $39\frac{3}{4}$
12
39
36
3

6) 508 | $84\frac{4}{6}$
48
28
24
4

40 Hayanſe pues de dividir 456 por 3: lo eſcribo como en el Exemplo primero. Tomo la primera cifra del Dividendo, que es 4,

y miro quantas veces eſtá en él contenido 3? Veo que 1, pues eſta es la primera cifra del Quociente, que pongo en ſu lugar, la multiplico por el Diviſor, y ſu producto 3 lo réſto de la cifra 4, que he dividido; à la reſta 1 le junto la ſegunda cifra del Dividendo 5, y tengo por *ſegundo miembro de la diviſion* 15. Pues buſco quantas veces eſtá contenido en él el Diviſor; y encuentro que 5 veces, pues el 5 es la ſegunda cifra del Quociente, que multiplicada por el Diviſor me da 15, el qual ſacandolo del miembro 15, que he dividido, queda 0. Baxo finalmente para tercer miembro de la diviſion el 6, que dividiendolo por 3, me da en el Quociente 2, que juntandolo al Quociente, me da por Quociente total 152, y como no queda ya cifra alguna para dividir, el Quociente es exacto, y la prueba es, que $152 \times 3 = 456$.

41 Si hecha la diviſion de todas las cifras del Dividendo, me quedaſſe algo como en los demás Exemplos, el Quociente encontrado no ſería del todo *exacto*; pero para que lo ſea, tomo eſto que queda, como en el ſegundo Exemplo el 3, lo pongo en el Quociente, poniendole immediatamente baxo el Diviſor 4, ſeparandolos entrambos con una liníta $\frac{3}{4}$, que es una fraccion, y ſerá el Quociente del todo exacto $39\frac{3}{4}$. Conſiderando atentamente lo que he hecho en eſta operacion,

cion, veo que no hai cosa mas natural que el Dividir, pues primero he repartido por las unidades del Divisor las *centenas*, despues las *decenas*, y despues las *unidades* del Dividendo, y assi todo el Dividendo queda repartido en el Divisor.

EXEMPLO.

$$\begin{array}{rrl} 324) & 131485 & \lfloor 405\frac{265}{324} \\ & 1296 & \\ \hline & 1885 & \\ & 1620 & \\ \hline & 265 & \end{array}$$

42 Si el Divisor contiene muchas cifras, como si se hubiesse de dividir 131485 por 324. *Considero lo primero en quantas de las primeras cifras del Dividendo se contiene el Divisor*? Y reparo que en las tres primeras 131 no está contenido, porque es menor 131, que 324, pues tomo una cifra mas del Dividendo, y tengo por primer miembro de la division 1314, que las separo con un puntico de las demás, y la primera operacion se reduce à dividir 1314 por 324. Pero como la division no se puede toda hacer à la una, divido las centenas de este miembro por las centenas del Divisor, y digo en 13 quantas veces está 3? y encuentro que 4 veces, pues

pongo el 4, que es la primera cifra del Quociente, que multiplicada por todo el Divisor, me da por producto 1296, que lo resto del primer miembro del Dividendo, y à la resta 18 le junto la cifra siguiente del Dividendo (8) para tener un segundo miembro de la division, que es 188.

43 Busco si en este segundo miembro del Dividendo 188 está contenido el Divisor 324, y reparo que ni aún una vez está contenido, pues pongo o en el Quociente, *lo que se hace siempre que el miembro Dividendo no iguala à lo menos al Divisor.* Baxo pues la cifra, que se sigue del Dividendo 5, y tengo por nuevo miembro 1885. Pues hago como en la primera operacion: en 18 quantas veces 3 ? 6, lo multiplico por el Divisor, y reparo que su producto 1944 es mayor, que el miembro Dividendo, pues es señal, que el Divisor no está contenido 6 veces en él, porque à serlo, 6 x por el Divisor sería menor, ò igual; pues rebaxo el 6 de una unidad, y pongo 5 en el Quociente, que multiplicado por el Divisor, resto su producto 1620 del miembro Dividendo, y me quedan 265.

Pero como no tengo ya en el Dividendo mas cifras que baxar, y en esta resta no está contenido el Divisor, está acabada la division, pero el Quociente 405 no es del *todo exacto*, pues le falta lo que resultaria de la di-

diviſion de la ultima reſta, y lo pondré como en los caſos antecedentes à forma de fraccion, para tener por Quociente exâcto $405\frac{265}{324}$.

44 De lo dicho haſta aquí advierto, 1°. *Que la Diviſion ſe hace por partes.* 2°. *Que la Diviſion requiere tres operaciones*: *Dividir* para encontrar un Quociente, *Multiplicar la cifra encontrada por el Diviſor*, para ver ſi eſta diviſion eſtá bien hecha, *Sacar eſte Producto del miembro Dividendo*, para ver ſi reſta algo para juntarlo al miembro ſiguiente de la Diviſion.

Eſtas ſon las Reglas fundamentales de toda la Arithmetica en Numeros enteros, y quanto ſe diga ſobre eſto no es mas que aplicacion de dichas Reglas à caſos particulares. Es verdad, que hechas familiares, y exercitadas eſtas Reglas, la miſma experiencia, y uſo facilita muchos modos de abreviar las operaciones, eſpecialmente en Multiplicacion, y Diviſion, como en los caſos ſiguientes.

45 1°. Para multiplicar una quantidad por 10, no hai ſino añadir à dicha quantidad un cero. Aſſi para multiplicar 12 por 10, añado à 12 un cero, y tendré por Producto 120. La razon de eſto es, porque multiplicar una quantidad por 10, es dar à cada cifra del Multiplicando un valor diez veces

veces mayor del que tenia, eſto es, hacer que la cifra, que ſignificaba *unidades*, ſignifique *decenas*, y la que ſignificaba *decenas*, ſignifique *centenas*, *&c.* y como la ſignificacion de las cifras, quando eſtán juntas, depende del orden, y de ſu diſtancia de la cifra de unidades, que es la *primera* à la derecha, añadiendo un cero, hago que las que eran primeras, ſean ſegundas; las ſegundas ſean terceras, &c. por conſiguiente, que las que ſignificaban unidades, ſignifiquen decenas, &c. Si añadieſſe dos ceros, multiplicaria por 100, ſi tres, por 1000, &c. En general *qualquier cifra, que ſe añade à una quantidad, da à las que eſtaban un valor decuplo, ò diez veces mayor, que el que antes tenian*, la qual Regla no ſe eſtiende à las *Fracciones Decimales.*

46 2º. Por la miſma razon para dividir una quantidad por 10, baſta ſeparar la ultima cifra por un puntico, y las otras ſerán el Quociente. Aſſi para dividir 120 por 10, quito el cero, y me queda por exâcto Quociente 12. Si la ultima cifra no fueſſe cero, el Quociente ſerá las otras cifras + *una fraccion*, que tendrá por Numerador dicha cifra ſeparada, y por Denominador el Diviſor, como explicarémos tratando de las *Fracciones Decimales.* Aſſi para dividir 216 por 10 el Quociente ſerá $21.\frac{6}{10}$, para dividir por

100

100 habia de ſeparar dos, por 1000 tres, &c.

3°. Quando aſſi en el Dividendo, como en el Diviſor hubiera en el fin algunos ceros, como ſi hubieſſe de dividir 34000 por 400, quito iguales ceros de entrambos, y divido lo demás, es à ſaber, 340 por 4, y el Quociente me ſerá el miſmo 85.

ARTICULO V.

De algunas coſas, que ſe ſuelen ofrecer en la practica de la Multiplicacion, y Diviſion.

47 QUatro ſon las coſas, que mas comunmente ſe ſuelen ofrecer en la practica. 1°. Encontrar todos los *Diviſores*, y *Factores* de una quantidad. 2°. Encontrar el *mayor comun Diviſor de dos quantidades*, ò la *mayor comun Medida* de entrambas. 3°. *Reducir unas quantidades à otras.* 4°. *Multiplicar, y Dividir quantidades mixtas*, ò que conſtan de diferentes eſpecies.

48 1°. Como toda quantidad, excepto la unidad, ſe puede conſiderar como un *Producto* de algunas otras inferiores, toda quantidad tendrá algunos *Factores*, por cuya multiplicacion ſe puede formar. Y como todo

todo *Factor* es un *Divisor* exâcto de la tal quantidad, por el qual dividiendola, el Quociente será el otro, ò el Producto de los otros, toda quantidad tendrá *Factores*, y *Divisores*: luego encontrando todos sus Divisores, tendrémos por consiguiente todos sus Factores. Para *encontrar todos los Divisores de una quantidad*, tomese la Regla siguiente.

Regla. *Dividase la quantidad por el Divisor mas pequeño, que exceda la unidad, y dé un Quociente sin resta. Dividase tambien este Quociente encontrado por el menor numero, ò Divisor, que exceda la unidad, y dé un Quociente sin resta, y prosigase assi successivamente dividiendo los Quocientes, hasta encontrar uno, que ya no sea divisible exâctamente sino por la unidad.* Pues este *Quociente ultimo*, y los *Divisores encontrados* son los Divisores *simples* de la quantidad dada, los *Productos* de cada *dos*, de cada *tres*, de cada *quatro* de ellos, &c. serán sus Divisores *compuestos*.

49 Hayanse de encontrar todos los Divisores de 60. La operacion es como se sigue.

Dividendos.		*Divisores.*		*Quocientes.*
60	:	2	=	30
30	:	2	=	15
15	:	3	=	5

Dividolo primero por 2, y su Quocien-

te

te 30, veo que tambien es divisible por 2, su Quociente 15 ya no es divisible por 2 sino por 3, su Quociente 5 ya no es divisible exâctamente por numero ninguno superior à la unidad.

Pues sus Divisores *simples*, ò *primeros* serán . . . . . 2, 2, 3, 5.
Los Divisores *compuestos* serán

Los Productos de *cada dos.* $\left\{\begin{matrix} 2 \times 2 = 4 \\ 2 \times 3 = 6 \\ 2 \times 5 = 10 \\ 3 \times 5 = 15 \end{matrix}\right\}$ . . . . 4, 6, 10, 15.

Los Productos de *cada tres.* $\left\{\begin{matrix} 2 \times 2 \times 3 = 12 \\ 5 \times 2 \times 2 = 20 \\ 3 \times 5 \times 2 = 30 \end{matrix}\right\}$ . . 12, 20, 30.

El Producto de *todos quatro.* $\left\{ 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60 \right\}$ . . . . . 60.

Porque $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$, en el qual Producto *cada cifra*, el Producto de *cada dos*, el Producto de *cada tres* son Factores, por consiguiente Divisores. A mas toda quantidad se puede dividir por sí misma, y assi el Producto de las *quatro* es tambien Divisor.

Facilitan mucho esta operacion las notas, que se ponen en la reduccion de Fracciones à su menor expression.

50 2º. Para encontrar el *mayor comun Divisor* de dos quantidades, ò que sea su *ma-*

mayor comun Medida de entrambas, tomeſe la Regla ſiguiente: *Dividaſe la mayor por la menor, y ſino queda reſta alguna, la quantidad menor es la mayor comun Medida, ò mayor comun Diviſor.* Porque ſe mide aſſi, tomada una vez, y mide la mayor, tomada tantas veces, como indica el Quociente, y ninguna mayor quantidad, que eſta menor, las puede medir entrambas. *Si queda alguna reſta, dividaſe el Diviſor por eſta reſta, y proſigaſe de eſta ſuerte, dividiendo ſiempre el ultimo Diviſor por la reſta, haſta llegar à un Quociente exacto, y encontrado eſte, el ultimo Diviſor es la mayor comun Medida de entrambas quantidades dadas.* Aſſi la mayor comun Medida de 45, y 63 es 9, de 256 y 48 es 16.

OPERACION.

```
45) 63 |1          48) 256 |5
   45                 240
  ----               -----
   18) 45 |2          16) 48 |3
      36                 48
     ----               ----
      9) 18 |2           0
         18
        ----
         0
```

51 Demueſtraſe en el primer Exemplo, porque el 9 ſe mide à ſí miſmo, luego tambien

bien à ſus *Multiplices*, y à las *ſumas de ſus Multiplices*, por conſiguiente mide al 18, que es ſu *duplo*, à $2 \times 18 + 9 = 45$, que es ſu *Quintuplo*, à $45 + 18 = 63$, *ſuma de ſu Quintuplo, y de ſu Duplo*, que es ſu *Septuplo*, luego es *comun Medida* de 45, y de 63, y es la *mayor*, porque ſi otro numero mayor que él, por exemplo 10, midieſſe à 45, y 63, tambien mediria ſu diferencia de entrambos 18, y ſi midieſſe 18, y 45, tambien mediria la diferencia del duplo de 18, y de 45, que es 9, y aſſi un numero mayor mediria otro menor.

Si hechas las diviſiones arriba dichas para encontrar la *mayor comun Medida*, no ſe pudieſſe llegar jamás à un Quociente exacto, ſino quando ſe llegaſſe à un Diviſor, que fueſſe la unidad, es ſeñal que no tienen otra mayor comun Medida, que la unidad, y que ſon *numeros Primeros entre sí*.

52 3°. *Reducir diferentes eſpecies una à otra* es lo miſmo, que dada una eſpecie de *mayor* valor, exprimirla por quantidades de *menor* valor, ò ver quantas hace de eſtas, y eſto es *reducir eſpecies ſuperiores à inferiores*; ò bien dadas quantidades de *menor* valor, ver quantas hacen de valor *mayor*, y eſto es *reducir eſpecies inferiores à ſuperiores*.

Para *reducir quantidades ſuperiores à inferiores, multipliqueſe la quantidad dada por el nu-*

numero de inferiores, que hacen una ſuperior, y el Producto ſerá la quantidad de eſpecie ſuperior expreſſada en eſpecies inferiores. Aſſi para reducir 24 *libras* à *ſueldos*, multiplico 24 por 20, numero de *ſueldos*, que hacen una libra, y el Producto 480 ſerá el numero de *ſueldos*, que hacen las 24 *libras*. Para reducir 25 *Varas* à *Pies*, ſupueſto que 3 *Pies* hacen una *Vara*, $3 \times 25 = 75$ ſerá el numero de *Pies*, que en dichas *Varas* ſe contienen. La razon de eſto es, porque ſupueſta una vara = 3 *Pies*, hai en 25 *Varas*, tantas veces 3 *Pies*, como es el numero de *Varas*: luego multiplicando el numero de *Varas* por el 3, tendré las *Varas* expreſſadas en el numero de *Pies*.

53 La inverſa de eſta operacion es la *Reduccion de eſpecies inferiores à ſuperiores*, para lo qual tomeſe la Regla ſiguiente. *Buſqueſe quantas eſpecies inferiores hacen una ſuperior, dividaſe la quantidad dada de eſpecies inferiores por eſte numero, y el Quociente ſerá el numero de eſpecies ſuperiores, que ſe contienen en el numero dado de eſpecies inferiores*, ò lo que es lo miſmo, *ſerá la miſma quantidad de eſpecies inferiores expreſſada en eſpecies ſuperiores.*

Hayanſe de reducir 366 *Pulgadas* à *Varas*. Porque la *Vara* contiene 3 *Pies*, y cada *Pie* 12 *Pulgadas*, contendrá la *Vara* 36 *Pulgadas*, pues divido 366 por 36, y el Quociente

ciente $10\frac{6}{36}$ me ſerá el numero de *Varas*, que hai en 366 *Pulgadas*.

54 4°. Ya diximos que *Quantidad mixta* es la que conſta de quantidades de diferentes eſpecies, pero que la una es parte de la otra. Para multiplicar pues dicha quantidad por un entero: *Multipliqueſe la eſpecie inferior de todas por dicho entero, y ſu Producto reduzgaſe à la eſpecie immediata ſuperior ſiguiente; ſi hai alguna reſta, pongaſe baxo la columna de eſpecies inferiores, y reſerveſe el numero de eſpecies ſuperiores para juntarlo al Producto ſiguiente*; y proſigaſe de la miſma ſuerte ſiempre de la eſpecie inferior à ſu immediata ſuperior.

EXEMPLO.

48v.	2P.	5pulg.	7lin.
			× 4
195	0	10	4

Para multiplicar 48 *varas*, 2 *pies*, 5 *pulgadas*, 7 *lineas* por 4, pongo las partidas como en el Exemplo. Empiezo 4×7=28 *lineas*, que reducidas à pulgadas hacen 2 *pulgadas*, y 4 *lineas*, pues pongo las 4 *lineas* baxo ſu reſpectiva columna, y reſervo las dos *pulgadas* para juntarlas al ſiguiente Producto. Proſigo, 4×5=20, à quien añadiendo 2, tengo 22 *pulgadas*, que reducidas à *pies*, es 1 *pie*, y 10 *pul-*

CAPITULO IV.

De las quatro Operaciones fundamentales de la Algebra.

56 HAſta ahora hemos hecho las operaciones de la Arithmetica en Numeros determinados, por conſiguiente ſus operaciones, y reſultados ſolo exprimian quantidades particulares. Pero ahora hemos de hacer las operaciones univerſales, y en qualeſquiera generos de quantidades, por conſiguiente *los Châracteres han de ſignificar indeterminadamente qualquier genero de quantidad, que queramos.* Las operaciones ſon las miſmas, que en la Arithmetica, eſto es, *Sumar*, *Reſtar*, *Multiplicar*, y *Partir*; ſe fundan en unos miſmos principios, aunque el modo de hacer eſtas operaciones es algo diferente en la Algebra, ò Calculo literal, que en la Arithmetica, lo que enſeñarémos al preſente. Pero para eſto es meneſter ſuponer algunas coſas.

ARTICULO PRIMERO.

Noticias previas para las Operaciones de la Algebra.

57 EN la Algebra las quantidades ſe exprimen por las letras del Alphabeto mayuſculas, ò minuſculas, *a*, *b*, *c*, *&c.* A, B, C, &c. Eſtas quantidades unas ſon *Poſitivas*, otras *Negativas*. Las Poſitivas ſon aquellas, à quienes precede el ſeñal +, como + *a*, y ſe pronuncia *plus*, ò *mas a*; las Negativas aquellas, à quienes precede el ſeñal —, y ſe pronuncia *minus*, ò *menos*, como — *a*, *minus a*. Quando à alguna quantidad no precedieſſe ſeñal alguno de eſtos, ſe ſobrentiende el Poſitivo +, por lo tanto *a* = + *a*.

58 Eſtas quantidades Poſitivas, y Negativas en ſubſtancia ſon las miſmas, ſino que los ſignos ſignifican el diferente modo de tomarſe, aſſi como en el Sumar, y Reſtar por la Arithmetica las partidas ſon las miſmas, ſolo que en la una operacion ſe *añaden*, y en la otra ſe *quitan*. Aſſi + *a* es la quantidad *a pueſta*, que es la *Poſitiva*, — *a* es la quantidad *a quitada*; por lo tanto las quantidades

Negativas ſon, y ſe llaman *menos que nada*, ò *menos que cero* por ſus efectos. Pues ſi à uno que tiene 6 *ducados* ſe le juntan o *ducados*, ſe queda con el miſmo dinero, que tenia, porque o ni añade, ni quita; pero ſi ſe le junta — 2 *ducados*, ſe queda con 6 — 2 *ducados* = 4, por lo tanto — 2 es inferior à o.

59 La quantidad, que ſe compone de muchas partes, ſeparadas unas de otras con los ſignos +, ò —, ſe llama quantidad *Complexa*, y dichas partes aſſi ſeparadas *Terminos* de la tal quantidad, conſten de una, ò de muchas letras. Aſſi $a+bc-d$ es una quantidad complexa, cuyos terminos ſon a, bc, d. Al contrario, ſi la quantidad ſe exprime por ſola una letra, ò bien por muchas, pero que no eſtán ſeparadas entre sí con los ſeñales +, ò —, es quantidad *Simple*, ò *Incomplexa*, como ab, $\frac{a}{b}$, c, &c. Las quantidades ſimples ſe llaman tambien *Monomas*, eſto es, de ſolo un termino; las complexas *Polinomias*; *Binomios*, ſi de dos; *Trinomios*, ſi de tres, &c.

60 Quando à alguna quantidad Algebraica le precede en el miſmo termino alguna cifra, ò numero, como $2a$, $3bc$, eſta cifra, ò numero ſe llama *Coeficiente* del tal termino, y ſignifica, *que la tal quantidad ſe ha de tomar tàntas veces, quantas unidades eſte coeficiente exprime*. Aſſi en $2a$ el coeficiente es 2,

y

y ſignifica, que *a* ſe ha de tomar dos veces, ò lo que es lo miſmo la *ſuma* de la quantidad *a* dos veces tomada. Si la quantidad Algebraica no tubieſſe numero alguno por coeficiente, ſiempre ſe ſupone ſerlo la unidad; por lo tanto $a = 1a$: aunque los coeficientes algunas veces ſe ponen tambien por letras, y en general ſe puede decir, que toda letra junta à otra ſin eſtar ſeparada por los ſignos +, ò —, es coeficiente de la otra; por lo tanto en eſte producto *ab*, *a* es coeficiente de *b*, *b* de *a*.

61 Las quantidades ſimples, que ſe exprimen por unas miſmas letras eſcritas igual numero de veces, ſe llaman *Semejantes* entre ſí, ſean, ò no ſean los miſmos los ſignos, y coeficientes numericos. Aſſi ſon quantidades ſemejantes eſtas $+a$, $-2a$, y eſtas otras $3ab$, $-5ab$. Pero una coſa hai, en que la expreſſion de las quantidades por Algebra ſe diferencia de la expreſſion por la Arithmetica comun, y es, que en la Arithmetica la ſignificacion de cada cifra depende del orden, en que en la expreſſion eſtá. Aſſi el 4 en eſta expreſſion 42 ſignifica quatro *decenas* de unidades, y en eſta 24 ſignifica ſolo quatro *unidades*; pero en la Algebra la ſignificacion de una letra no eſtá de eſta ſuerte atada, y aſſi ſignifica lo miſmo, eſté antes, ò deſpues, con tal que quede en un miſmo termino;

por lo tanto lo mismo es *ab*, que *ba*. De la misma suerte en los *terminos* de las quantidades complexas, que siempre significan lo mismo, esté el uno antes, ò despues del otro; por consiguiente será la misma $a-b$, que $-b+a$.

ARTICULO II.

Sumar quantidades Algebraicas.

62 CAso 1º. *Sumar quantidades semejantes de unos mismos signos positivos, ò negativos.*

Regla. *Pongase el signo comun à entrambas, sumense sus coeficientes, y añadanse una vez à esta suma las letras comunes.*

EXEMPLOS.

	$+3a$	$-ab$	$7a-6x$
	$+8a$	$-7ab$	$15a-9x$
Sumas	$+11a$	$-8ab$	$22a-15x$

La demonstracion de esta Regla se toma de la misma naturaleza del *Sumar*, que es juntar en una muchas quantidades. Si à $3a$ añado $8a$ (sea lo que sea la quantidad a), la Suma será $11a$. Para las quantidades negativas es lo mismo. Si à una deuda de *ab* añado otra deuda de $7ab$ (sea la quantidad que sea *ab*) la suma

ſuma de las deudas ſerá —8*ab*. Pues las deudas, que diſminuyen la renta, tienen mucha ſemejanza con las quantidades negativas, que ſe oponen à las poſitivas, y las diſminuyen.

63 Caſo 2º. *Sumar quantidades ſemejantes, pero de diferentes ſignos.*

Regla. *Quiteſe el coeficiente menor del coeficiente mayor, pongaſe la reſta con el ſigno del coeficiente mayor, y añadanſele à eſta reſta la letra, ò letras comunes.*

EXEMPLO.

$$\begin{array}{r} 15x + 3d + 6c + 18 \\ -\ 4x - 4d - 5c - \ 9 \\ \hline \textit{Suma} \quad 11x - \ d + \ c + \ 9 \end{array}$$

Quando hubieſſe muchas partidas de quantidades ſemejantes, unas poſitivas, y otras negativas, para mas limpieza, y expedicion, ſumenſe primero las poſitivas, deſpues las negativas, y ſumenſe deſpues entrambas ſumas.

EXEMPLO.

$$\begin{array}{rr} & +\ 5a \\ & -\ 8a \\ & +\ 7a \\ & -\ 15a \\ \hline \textit{Suma de Poſitivas} & +\ 12a \\ \textit{Suma de Negativas} & -\ 23a \\ \hline \textit{Suma total} & -\ 11a \end{array}$$

Sumar

64 Sumar es juntar muchas quantidades, y ver la quantidad, que reſulta de eſta junta. Siendo en eſte caſo las unas *Poſitivas*, las otras *Negativas*, igual numero de las unas deſtruye igual numero de las otras: luego ſolo queda parte de la que tiene mayor coeficiente, y por eſſo *ſe pone ſolo la diferencia de entrambas con el ſigno de la mayor.* Y aſſi eſta Suma de quantidades de *diferentes ſignos*, en ſubſtancia es una verdadera reſta. Como ſi uno para averiguar ſu verdadera renta juntaſſe ſu renta, y ſus cargos, lo que en limpio tendria, ſería la diferencia de entrambos.

65 Caſo 3º *Sumar quantidades diferentes, ò deſemejantes.*

Regla. *Eſcribanſe todas, unas deſpues de otras, en una miſma linea con ſus proprios ſignos, y eſta quantidad ſerá la Suma de todas.*

EXEMPLOS.

	$2a$	$5a-15x$
	$3b$	$3b+4c$
Sumas	$2a+3b$	$5a+3b+4c-15x$

De eſte modo de obrar ſe ve, quan mas facil es Sumar por Algebra, que por la Arithmetica comun, pues en la Arithmetica es meneſter comenzar por la derecha, y llevar las decenas. En la Algebra ſe puede comenzar por

por la derecha, ò por la izquierda, ò por el medio, como quiera, y no es meneſter llevar coſa.

66 Quando en una quantidad hai muchos terminos de quantidades ſemejantes, ſe abrevia mucho, reduciendo dichos terminos à uno. Por exemplo haya $4a+5a$, ſe pone mas breve, poniendo unicamente $9a$, porque $4a+5a=9a$. Haya $5a-6a$, ſerá mas breve $-a$, porque $5a-6a=-a$. Sean iguales dichas quantidades ſemejantes, pero una con ſigno +, otra con ſigno —, las quito entrambas, porque ſon ocioſas, deſtruyendoſe unas à otras; pues $4a-4a=0$. Eſto ſe llama *corregir la operacion*, ò limpiarla de terminos ſuperfluos. Por eſſo dan algunos una Regla general para Sumar qualeſquiera quantidades Algebraicas, y es: *Eſcribanſe todas las partidas, unas deſpues de otras con ſus proprios ſignos, borrenſe las que mutuamente ſe deſtruyen*, y eſſa ſerá la *Suma total.*

ARTICULO III.

Reſtar quantidades Algebraicas.

67 REgla general. *Mudenſe los ſignos de los terminos de la quantidad, que ſe debe quitar. Sumeſe eſta quantidad, los*

los ſignos aſſi mudados, con la quantidad, ò partida, de quien ſe ha de quitar, y la ſuma de entrambas aſſi pueſtas, es la Diferencia, ò la Reſta. Borrando los terminos, que mutuamente ſe deſtruyan.

EXEMPLOS.

	$5a$	$6a$	$4c-x+d$
	$2a$	$-3b$	$-5c+x-d$
Reſtas	$5a-2a=3a$	$6a+3b$	$9c-2x+2d$

Demueſtraſe eſta Regla. Reſtar es quitar una quantidad de otra. Si la quantidad, que ſe debe *quitar*, es poſitiva, *mudandole el ſigno* ſe hace negativa, y *ſumandola, aſſi pueſta*, con la otra de quien ſe debe hacer la ſubſtraccion, ſe le junta una quantidad negativa, que le deſtruye igual parte poſitiva, por conſiguiente ſe le *quita* la tal quantidad poſitiva. Aſſi juntandoſele $-2a$ à $5a$, es deſtruirle à $5a$, $2a$, de donde $5a-2a=3a$.

De la miſma ſuerte, ſi la quantidad, que ſe ha de *quitar*, fueſſe negativa, mudandole el ſigno, ſe hace poſitiva, y juntandoſe à la otra, de quien ſe ha de hacer la ſubſtraccion, le deſtruye igual parte negativa, que es *quitarſela*. Aſſi quitando de $a-c$ eſta quantidad $-c$, ſerá la diferencia $a-c+c=a$. En general el *quitar* una quantidad poſitiva es lo miſmo, que *añadir* una negativa, y al contrario.

ARTI-

ARTICULO IV.

Multiplicar una quantidad Algebraica por otra.

68 POniendo el Multiplicador baxo del Multiplicando, ſe ha de conſiderar el Multiplicador, como ſi en cierta manera fueſſe un numero; por conſiguiente *ſe han de multiplicar todos los terminos del Multiplicando* (ſi tubieſſe muchos) *por cada termino del Multiplicador, y deſpues ſuman todos eſtos particulares Productos, y eſta ſuma ſerá el Producto total.* La multiplicacion ſe puede comenzar por la derecha, ò por la izquierda, como parezca, pues el valor de las quantidades Algebraicas no depende del orden en que eſtán. El Multiplicador, y el Multiplicando ſe han de conſiderar como *Factores* del Producto. Conſidereſe pues en entrambos Factores el *ſigno*, el *coeficiente*, y la *quantidad expreſſada por las letras*, para ver lo que ha de reſultar en el Producto.

69 Regla univerſal para los *Signos* del Producto. *Quando entrambos Factores tubieſſen un miſmo ſigno, poſitivo, ò negativo, el ſigno del Producto es ſiempre poſitivo* +. *Si tubieſſen diferentes ſignos, el ſigno del Producto*

es

es ſiempre negativo —. O bien en otros terminos *Semejantes. ſignos dan* + *en el Producto, Diferentes* —. Aſſi +x+=—x—=+, +x—=—. Eſto preſupueſto, para multiplicar quantidades ſimples, *Multipliquenſe entre sí los coeficientes, y deſpues las quantidades*, eſto es, *juntenſe en un termino todas las letras de entrambos Factores, y el termino, que de todo eſto reſulte, ſerá el Producto.*

EXEMPLOS.

	+ 4*a*	— 3*ab*	+*d*	—*c*
x	+ 5*b*	x — 4*cd*	x —*b*	x +*n*
Prod.	+20*ab*	+12*abcd*	—*db*	—*cn*

Si los Factores fueſſen quantidades complexas, ò que conſtan de muchos terminos, *la multiplicacion ſe hace de la miſma ſuerte, multiplicando ſucceſſivamente todos los terminos del Multiplicando por cada termino del Multiplicador*, y la ſuma de todos eſtos Productos ſerá el Producto total.

EXEMPLO.

$$\begin{array}{rl} & 3d + 4a - 5x \\ \times & 4c - 6x \\ \hline & 12cd + 16ac - 20cx \\ - & 18dx - 24ax + 30xx \\ \hline \end{array}$$

Prod. $12cd + 16ac - 20cx - 18dx - 24ax + 30xx$

Co-

70 Como el *Multiplicar quantidades compueſtas* ſea una repiticion de la multiplicacion de quantidades ſimples, demonſtrando la Regla de Multiplicar en quantidades ſimples, queda demonſtrada en quantidades compueſtas.

En orden à los Signos del Producto, ſupueſto el Multiplicando *poſitivo*, ò con el ſigno +, ſi el Multiplicador es tambien *poſitivo*, el Producto ſerá tambien. Aſſi $+n \times +a = +na$. Pues multiplicar, *quando el Multiplicador es poſitivo*, es *tomar* tantas veces el Multiplicando, como unidades hai en el Multiplicador: luego eſta quantidad poſitiva *tomada muchas veces*, como exprime el Multiplicador poſitivo, ſerá una quantidad poſitiva, pues la ſuma de muchas quantidades poſitivas, ò de una muchas veces tomada, es una quantidad poſitiva. De donde $+n \times +a = na$.

Si el Multiplicando es *negativo*, y el Multiplicador tambien *negativo*, el Producto ſerá aun *poſitivo*. Aſſi $-n \times -a = na$. Pues *ſiendo el Multiplicador negativo*, el multiplicar ſerá *quitar* tantas veces el Multiplicando, quantas exprime el Multiplicador; pero el Multiplicando es una quantidad negativa, y una quantidad negativa no ſe puede quitar ſino poniendo poſitivas: luego el Producto, que es la ſuma de eſſas poſiciones, debe ſer un

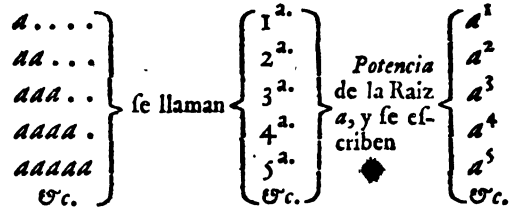
un todo positivo; y será $-n \times -a = na$. De donde *Semejantes signos dan en el Producto* +.

Si el Multiplicando es *negativo*, y el Multiplicador *positivo*, el Producto será negativo, esto es, $-a \times n = -an$. Porque en este caso se *toma* el Multiplicando quantas veces exprime el Multiplicador, pero el Multiplicando es negativo: luego el Producto será la suma de una quantidad negativa muchas veces tomada, y la suma de muchas quantidades negativas, ò de una muchas veces tomada, es una quantidad negativa. Si el Multiplicando es *positivo*, y el Multiplicador *negativo*, vale tambien la misma razon, porque haciendo el Multiplicador Multiplicando, ò al contrario, el Producto es el mismo. Y assi *Diferentes signos dan — en el Producto.*

71 Es mui corriente entre los Mathematicos, en lugar del Producto poner solo los Factores separados entre sí por el signo de la multiplicacion. Assi en lugar de este Producto $ac - ad + bc - bd$ ponen sus Factores $(a+b) \times (c-d)$, ò bien de esta suerte $\overline{a+b} \times \overline{c-d}$. En lugar de $ac - dc$, ponen $\overline{a-d} \times c$. Si el Producto se exprime solo por dos Factores, como ab, se llama *Rectangulo*, ò Producto *de dos dimensiones*, ò bien *Plano* de a por b. Si se exprime por *tres* se llama *Solido*. Si todos los factores, ò raices son iguales, los Productos

tos se llaman *Potencias*, ò *Dignidades* de la raiz. Assi *aa*, *aaa*, &c. son Potencias de la raiz *a*.

72 *Las Potencias comunmente se exprimen poniendo solo la Raiz, y una cifra à la derecha algo mas arriba, que indica quantos son los factores, que la producen.* Assi



Estas cifras à la derecha algo mas arriba se llaman *Indices*, ò *Exponentes* de la Potencia, ò bien porque *exponen*, que Potencia sea de la Raiz, ò bien porque exponen quantas veces dicha Potencia se habia de dividir por la Raiz, para llegar à un quociente, que sea 1, ò bien porque *indican* quantuplicada sea la razon, que tiene *dicha Potencia* à 1, de la razon de la Raiz à 1. Assi la razon de a^5 à 1 es quintuplicada de la razon de *a* à 1, como verémos tratando de las Razones; ò bien finalmente porque exponen quantas veces se habia de poner la expression de la Raiz para exprimir esse Producto. Assi $a^2 = aa$. Lo que hemos dicho de las Potencias, se entiende tambien aun caso que la Raiz se exprima por dos, ò mas letras,

tras, con tal que ſea de ſolo un termino. Por lo tanto la 2ª. Potencia de ab es $a^2\,b^2 = aabb$.

73 *Las Potencias de una miſma Raiz ſe multiplican entre sí, ſumando los Exponentes de los factores, para formar un Exponente, que lo ſea del Producto, eſcribiendo en eſte Producto ſolo la Raiz con eſte nuevo Exponente, guardando ſiempre la Regla general de los ſignos.* Aſsi $a^5 \times a^6 = a^{5+6} = a^{11}$, $a^{-4} \times a^{-3} = a^{-7}$, $b \times b = b^2$, $b^{-4} \times -b^3 = -b^{-4+3} = -^{-1} = -b^{-1}$. Porque ſumar los Exponentes es lo miſmo, que juntar las expreſsiones que ellos indican, y el juntar dichas expreſsiones es lo miſmo, que multiplicar las quantidades.

Por lo tanto multiplicando *aa* por *aaa*, el Producto ſerá *aaaaa*; pero eſto es lo miſmo que $a^{2+3} = a^5$. *Si las Potencias fueſſen de diferentes Raices, la multiplicacion ſe hace por el methodo comun, juntando ſus expreſſiones con ſus proprios Exponentes.* De donde $a^2 \times b^2 = aabb$, $-a^3 \times -c^2 = +a^3c^2 = aaacc$.

ARTICULO V.

De la Diviſion de quantidades Algebraicas.

74 LA Diviſion en las quantidades Algebraicas es como en la Arithmetica comun, que conſiſte en buſcar un Quociente,

ciente, que exprima quantas veces el Diviſor eſtá contenido en el Dividendo, por conſiguiente en buſcar una quantidad, que multiplicada por el Diviſor dé por producto el Dividendo. De eſta ſola explicacion ſe ve, que la Regla de los *ſignos* debe ſer la miſma en el Dividir, que en el Multiplicar, eſto es, *que ſi los ſignos del Dividendo, y del Diviſor fueſſen ſemejantes, el ſigno del Quociente debe ſer poſitivo, ò +; ſi fueſſen deſemejantes, el ſigno del Quociente debe ſer negativo, ò —.*

75 Porque debiendo ſer el Quociente una quantidad, que multiplicada por el Diviſor, dé por producto el Dividendo, ſi entrambos ſignos de Dividendo, y Diviſor ſon *poſitivos*, el ſigno del Quociente no puede ſer negativo; porque à ſerlo, el *negativo* del Quociente multiplicado por el *poſitivo* del Diviſor, daria por producto el *poſitivo* del Dividendo, contra la Regla de Multiplicacion. Si entrambos ſignos del Dividendo, y del Diviſor ſon *negativos*, tampoco el ſigno del Quociente puede ſer *negativo*, pues à ſerlo, el *negativo* del Quociente multiplicado por el *negativo* del Diviſor, daria por producto el *negativo* del Dividendo, tambien contra la Regla de Multiplicacion.

Si los dos ſignos de Diviſor, y Dividendo ſon *diferentes* entre sí, el ſigno del Quociente jamás puede ſer *poſitivo*; porque à ſerlo,

lo, ſi el del Dividendo es +, y el del Diviſor —, — × + del Quociente daria + del Dividendo. Si el del Dividendo es —, y el del Diviſor +, + del Diviſor multiplicado por + del Quociente daria + al Dividendo; luego tambien en la Diviſion, como en la Multiplicacion vale la Regla *Semejantes ſignos dan +, Diferentes —*. Eſto preſupueſto.

76 Regla general. *Pongaſe el Dividendo ſobre el Diviſor, ſeparandolos entrambos por una liníta. Borrenſe todas las letras comunes, ſi las hai*, eſto es, *que ſe encuentren en todos los terminos del Dividendo, y del Diviſor, dividanſe los coeficientes de todos los terminos por una comun medida, y la quantidad aſſi pueſta es el Quociente.*

Aſſi para dividir $10ab + 15ac$ por $20ad$, el Quociente en ſubſtancia es $\frac{10ab + 15ac}{20ad}$; pero para mayor limpieza, y para reducir la expreſſion à otra mas breve, divido los tres coeficientes por 5 (que es ſu comun medida) quito la a, que ſe encuentra en todos los terminos, aſſi del Diviſor, como del Dividendo, y ſe reduce la expreſſion à $\frac{2b + 3c}{4d}$. Dividiendo $12aab$ por $4a$, el Quociente es $\frac{12aab}{4a} = 3ab, - a$ dividido por $+ b = - \frac{a}{b}$, $\frac{-c}{-d} = + \frac{c}{d}$.

Las

77 *Las Potencias de una miſma Raiz ſe dividen entre sí, quitando el Exponente del Diviſor del Exponente del Dividendo*, aſſi como ſe multiplican, ſumando los Exponentes. Porque a^4 dividido por $a^2 = \frac{aaaa}{aa}$, y quitando *aa* del Diviſor, y del Dividendo, por ſer quantidades comunes, ſe reduce la expreſſion à ſer $aa = a^{4-2} = a^2$, $\frac{b^5 a^3}{b^6 a^4} = \frac{1}{ba} = b^{-1} a^{-1}$, $\frac{b^3}{b^3} = b^{3-3} = b^0 = 1$. *Pero ſi fueſſen Potencias de diferentes Raices, ſe dividen como las demás quantidades ſimples.* Aſſi a^4 dividido por $b^3 = \frac{a^4}{b^3}$.

78 Eſta Regla, que hemos dado para la Diviſion, aunque ſea univerſal, por mas terminos, que tengan el Diviſor, y el Dividendo, y ſea amás de eſto el comun modo con que ſe hace la Diviſion en la practica, y quando las quantidades ſon ſimples, ſea muchas veces del todo neceſſaria, no obſtante hemos de confeſſar, que no es ſino una *Diviſion indicada*, y à veces es meneſter, que en realidad ſe haga à la larga la Diviſion, y aſſi es preciſo dar Reglas para ello.

Si el Diviſor, y el Dividendo fueſſen quantidades de muchos terminos, ſupueſto que el tranſtorno del orden de los terminos

no muda en el [illegible]ora ſu valor, y ſe pueden, aſſi la Diviſion, como la Multiplicacion, empezar por donde ſe quiera; pero para proceder con orden tomeſe la Regla ſiguiente.

Regla: 1°. *Diſponganſe los terminos, aſſi en el Dividendo, como en el Diviſor, ſegun la mayor dimenſion de alguna de las letras* (ſi es poſſible) *que ſea comun al Diviſor, y al Dividendo, poniendo por primer termino el que tubieſſe una letra de mayor dimenſion, y por ſegundo el de dimenſion immediatamente inferior, y aſſi ſucceſſivamente.*

2°. *Dividaſe el primer termino del Dividendo por el primer termino del Diviſor, y pongaſe el Quociente ſeparado.*

3°. *Multipliqueſe eſte Quociente encontrado por todo el Diviſor, y ſu producto reſteſe del Dividendo.* Si no queda reſta alguna, la operacion eſtá acabada, y el Quociente encontrado es exacto.

Si hecha toda eſta operacion, reſtaſſe algo, *eſto ſerá un ſegundo miembro de la Diviſion*, y aſſi ſe han tambien de diſponer los terminos ſegun las dimenſiones de alguna letra, ſi ſe puede, ò ſi no dexarlos como ſe eſtán, y dividaſe el primer termino del Dividendo por el primero del Diviſor, y el Quociente ſerá la ſegunda parte del Quociente total.

Multipliqueſe eſta ſegunda parte del Quociente

ciente por todo el Diviſor, y ſu producto reſteſe del ſegundo miembro del Dividendo, ſi no queda reſta alguna, ſe acabó la operacion; pero ſi queda, proſigaſe de la miſma ſuerte, haſta que, ò no quede reſta alguna, ò ſe vea, que ſiempre, por mas que ſe proſiga, quedará algo, y entonces veaſe que lei guarda el Quociente, y ſe podrá proſeguir ſin fin, ſin neceſſitar de la operacion, para proſeguir el Quociente.

79 Algunos Exemplos aclaran eſta Regla, que en ſubſtancia es la miſma que en la Arithmetica comun.

Hayaſe de dividir $2ab+a^2+b^2$ por $a+b$. Diſpongo el Dividendo ſegun la dimenſion de alguna letra, y aſſi encuentro, que en a^2 hai dos dimenſiones de a, y en $2ab$ hai ſola una dimenſion de a, pues lo diſpongo de eſta ſuerte $a^2+2ab+b^2$.

EXEMPLO I.

Diviſor $a+b$) $a^2+2ab+b^2$ ($a+b$ *Quociente.*
Producto a^2+ab

Reſta, y nuevo Div^do. b^2+ab
Producto b^2+ab

0

Divido el primer termino del Dividen-

do por el primero del Diviſor, eſto es, a^2 por a, el Quociente es a, que pongo en ſu lugar. Multiplico eſte Quociente por todo el Diviſor, pongo ſu producto $a^2 + ab$ baxo el Dividendo, y reſtandolo, me queda por diferencia, ò reſiduo, y ſegundo miembro de la Diviſion $b^2 + ab$. Para ordenar tambien los terminos en el Diviſor, en lugar de $a + b$, pongo $b + a$. Divido el primer termino del Dividendo por el primero del Diviſor, eſto es, b^2 por b, el Quociente es b, que pongo con el miſmo ſigno al lado de la primera parte del Quociente ya encontrada. Multiplico el nuevo Quociente b por todo el Diviſor $b + a$, y el producto $b^2 + ab$, lo quito del Dividendo, no reſta coſa; pues ſe acabó la Diviſion, y veo que el Quociente total es $a + b$.

80 Eſtas ſon en ſubſtancia todas las operaciones, que ſe executan en la Diviſion, que aunque no ſon dificiles, pero piden alguna paciencia.

EXEMPLO II.

$$
\begin{array}{l|l}
x^2 - 2ax + a^2) & x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 \quad (x - a \\
 & \underline{x^3 - 2ax^2 + a^2x} \\
 & \quad - ax^2 + 2a^2x - a^3 \\
 & \quad \underline{- ax^2 + 2a^2x - a^3} \\
 & \qquad 0
\end{array}
$$

EXEMPLO III.

$$
\begin{array}{l|l}
3a-6 & 6aaaa-96\ (2aaa+4aa+8a+16 \\
 & \underline{6aaaa-12aaa} \\
 & \quad 12aaa-96 \\
 & \quad \underline{12aaa-24aa} \\
 & \qquad 24aa-96 \\
 & \qquad \underline{24aa-48a} \\
 & \qquad\quad 48a-96 \\
 & \qquad\quad \underline{48a-96} \\
 & \qquad\quad\ \ 0
\end{array}
$$

Eſtos Exemplos mueſtran, que alguna vez el Quociente, ſacandolo de eſta ſuerte, llega à ſer exacto, no habiendo reſta alguna, hecha la operacion; pero tambien à veces ſucede, que por mas que la operacion ſe proſiga, ſiempre hai alguna reſta, ò reſiduo, por conſiguiente el Quociente ſerá una *Série* infinita, ò de terminos ſimples, ò de fracciones, ò de Potencias de algun termino. Entonces comparando entre sí dos, ò tres terminos, obſerveſe que lei guardan (porque comunmente la ſiguen), y aſſi formando una Série ſegun la miſma lei, ſin hacer mas operaciones, ſe tendrá el Quociente tanto mas exacto, quanto mas ſe proſiga: ò ſi no deſpues de muchos terminos del Quociente, que ſe ha obteni-

do

do por la actual Diviſion, pongaſe el reſiduo por Numerador, y el Diviſor por Denominador.

81 Aquí hai algunos Exemplos, en que el Quociente forma una Série infinita. En el 1º. dividiendo 1 por $1-a$, ſe encuentra por Quociente $1+a+a^2+a^3+a^4$, &c. y entonces añadiendo ſucceſſivamente Potencias de a, ſe llega à mui grande exactitud, ſin neceſſitar de proſeguir la operacion.

EXEMPLO I.

$$1-a) \; 1 \quad (1+a+a^2+a^3+a^4, \text{ \&c.}$$
$$\underline{1-a}$$
$$a$$
$$\underline{a-a^2}$$
$$a^2$$
$$\underline{a^2-a^3}$$
$$a^3$$
$$\underline{a^3-a^4}$$
$$a^4 \text{ \&c.}$$

Con ſemejante operacion ſe encuentra, que

$$\frac{c^2}{c^2+2cy+y^2} = 1-\frac{2y}{c}+\frac{3y^2}{c^2}-\frac{4y^3}{c^3}+\frac{5y^4}{c^4}, \text{ \&c.}$$

$$\frac{1+x^2-2x^4}{1-x-x^2} = 1+x+3x^2+4x^3, \text{ \&c.}$$

EXEM-

EXEMPLO II.

$$a+x)\ aa+xx\ \left(a-x+\frac{2x^2}{a}-\frac{2x^3}{a^2}+\frac{2x^4}{a^3},\ \&c.\right.$$

$$\begin{array}{l}
aa+ax \\
\hline
-ax+xx \\
-ax-xx \\
\hline
\qquad 2xx \\
\qquad 2xx+\dfrac{2x^3}{a} \\
\hline
\qquad\quad -\dfrac{2x^3}{a} \\
\qquad\quad -\dfrac{2x^3}{a}-\dfrac{2x^4}{a^2} \\
\hline
\qquad\qquad\quad \dfrac{2x^4}{a^2}\ \&c.
\end{array}$$

En el Quociente de esta ultima operacion se ve 1º. Que es una Série, que jamás se acabaria, y por consiguiente infinita. 2º. Que los terminos van alternando en orden à los signos, ya positivos, ya negativos. 3º. Que desde el tercer termino los coeficientes son 2, y que desde el segundo se va en el numerador, formando una Série de Potencias de x, que es el segundo termino del Divisor, y en el denominador una Série de Potencias de a, que es el primero.

La

82 La demonſtracion de quanto hemos dicho ſobre la Regla de Dividir, es la general, que obrando de eſta ſuerte, el producto del Quociente por el Diviſor es igual al Dividendo; ò ſi el Quociente no es del todo exacto, como ſucede ſiendo una Série infinita, la ſuma del producto del Diviſor por el Quociente + la ultima reſta es igual al Dividendo. Algunas veces en la practica para abreviar ſolo ſe indica la diviſion, y eſto ſignifica el Quociente. El ſeñal que indica la operacion es diferente en varios Authores; unos ponen ſolo dos punticos entre las dos quantidades, ſiendo la primera el Dividendo, la ſegunda el Diviſor. Aſſi $(a+b):(c+d)$ ſignifica el Quociente de $a+b$ dividido por $c+d$; otros Ingleſes en lugar de los dos punticos ponen $\div$.

CAPITULO V.

De las Fracciones comunes, assi Numericas, como Algebraicas.

ARTICULO PRIMERO.

Explicase, que cosa sea Fraccion, y su valor.

83 QUando en las Mathematicas decimos *uno*, *unidad*, 1, esta expression, como toda la de los Numeros, es mui abstracta, porque en realidad cada cosa es una tal unidad, como *una* Vara, *un* Pie, &c. y qualquier quantidad es *una* tal, y assi las *unidades* no son iguales. Qualquier Unidad pues se puede concebir como dividida en muchas partes iguales, y se pueden tomar alguna, ò algunas de essas partes. Assi una Vara se puede concebir como dividida en *tres* partes iguales, cada una de estas partes se llama *Pie*; pues la expression de alguna, ò muchas de estas partes, es lo que llamamos *Fraccion*, ò *Quebrado*.

84 La expression de qualquier Fraccion debe contener dos cosas, una que exprima

en

en quantas partes iguales ſe concibe como dividida la unidad, y ſe llama *Denominador*; porque da el nombre à la *qualidad* de partes: otra, que ſe llama *Numerador*; porque exprime *quantas de eſtas partes ſe toman.* La expreſsion pues de la Fraccion ſe pone de eſta ſuerte $\frac{2}{15}$ en donde el 15 es el Denominador, è indica, que la unidad ſe concibe dividida en *quince* partes iguales, y el 2 es el Numerador, que indica, que ſe toman *dos* de eſtas partes.

85 De aquí es, que *ſi el Numerador de una Fraccion es igual al Denominador, la Fraccion es igual à la unidad.* Aſsi $\frac{3}{3}=1$, $\frac{5}{5}=1$, $\frac{b}{b}=1$; porque ſi concebimos una Vara dividida en *tres* partes, y las tomamos todas *tres*, es cierto, que tomamos toda *una* Vara.

Si el Numerador es mayor, que el Denominador, la Fraccion es mayor, que la unidad. Aſsi $\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$, $\frac{6}{3}=2$, $\frac{8}{6}=1\frac{2}{6}$; porque ſe toman quantas partes ſon ſuficientes para la unidad, que ſon las iguales al Denominador, y *mas*; por eſte exceſſo es mayor, que la unidad. Pero eſtas dos eſpecies de Fracciones de Numerador *igual*, ò *mayor*, que el Denominador, ſe llaman, y ſon *Fracciones improprias.*

Si el Numerador es menor, que el Denominador, la Fraccion es menor, que la unidad, y ſolo en eſte caſo es *propria Fraccion*, por ſer

ſer unicamente parte de la unidad, como $\frac{3}{4}$. Quantidad *Mixta* es aquella en la qual la una parte es uno, ò muchos Enteros, y la otra una Fraccion, como $3\frac{1}{4}$, $12\frac{2}{6}$, $1\frac{12}{13}$, $a+\frac{1}{3}$.

86 *Una Fraccion no muda ſu valor, por conſiguiente ni ſe aumenta, ni diſminuye, por mas que ſe multipliquen, ò dividan Numerador, y Denominador por una miſma quantidad.* Porque $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$ ſon Fracciones iguales, pues cada una de ellas es la mitad de la unidad; pero $\frac{1}{2}=\frac{1\times 2}{2\times 2}=\frac{2}{4}$. Aſſi multiplicando por 2 Numerador, y Denominador de $\frac{1}{2}$, la Fraccion $\frac{1\times 2}{2\times 2}$ tiene el miſmo valor, que antes. Mas: dividanſe en la Fraccion $\frac{4}{8}$ Numerador, y Denominador por 2, ſe reducirá à $\frac{2}{4}$; pero $\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$: luego dividiendo Numerador, y Denominador por una miſma quantidad, el valor ſiempre es el miſmo. En Algebra es $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}=\frac{ad}{bd}=\frac{a:d}{b:d}$.

87 *El valor de una Fraccion es igual al Quociente del Numerador dividido por el Denominador*, que es decir, que $\frac{3}{4}$ de un eſcudo es igual al quociente, que reſulta, dividiendo 3 eſcudos por 4. Exprimaſe por q el quociente de 3 dividido por 4. Como el Dividendo contiene al Diviſor de la miſma ſuerte, que el Quociente à la unidad (1), la miſma proporcion tendrá el dividendo 3 al diviſor 4, que tiene el quociente q à 1; pero 3

es

es tres quartos de 4; porque haciendo de 4 *quatro* partes, 3 contendrá las *tres*, luego tambien *q* el quociente ſerá las *tres quartas* de la unidad, ò 1; pero la Fraccion $\frac{3}{4}$ es tambien tres quartas de la unidad, luego la Fraccion es igual al Quociente, que reſulta del Numerador dividido por el Denominador.

De ahí viene en la Algebra el reducir una Fraccion à Série finita, ò infinita, dividiendo el Numerador por el Denominador, y el quociente, que ſuele ſer una Série, es igual à la Fraccion. Si deſpues de una diviſion de Enteros hai alguna reſta, que ponemos à modo de Fraccion, y queremos averiguar ſu valor, reduzgaſe el Numerador à eſpecies inferiores, y dividaſe aſſi reducido por el Denominador, ſu Quociente nos dará el valor de la Fraccion.

Explicadas ya las Fracciones, y ſu valor, todo lo que acerca de ellas ocurre para la practica, es *Reducirlas* à expreſſiones mas oportunas à nueſtro intento, guardando ſiempre un miſmo valor, y hacer con ellas las operaciones comunes de *Sumar*, *Reſtar*, *Multiplicar*, y *Partir*.

ARTICULO II.

De la Reduccion de Fracciones à otras Expreſſiones.

EN general *reducir* una quantidad à otra es *exprimir dicha quantidad de otra ſuerte*, de manera que aunque las expreſſiones ſean diferentes, el valor es el miſmo.

88 PROBLEMA I. *Reducir un Entero à Fraccion de un determinado Denominador.*

Regla. *Multipliqueſe el Entero por el Denominador dado, poniendo el producto por Numerador, y por Denominador el Denominador dado, la Fraccion que reſulte, ſerá el Entero reducido à Fraccion del determinado Denominador.*

Aſſi reduciendo 65 à Fraccion, que tenga por Denominador 32, ſerá $\frac{65 \times 32}{32} = \frac{2080}{32}$. En Algebra, hayaſe de reducir $a + b$ à Fraccion, que tenga por Denominador c, ſerá $\frac{ac + bc}{c}$. Y como qualquier numero, y quantidad ſe puede multiplicar por otra, y dividir por ella, qualquier quantidad ſe puede reducir à qualquier genero de Fracciones. Ya ſe ve, que ſi lo que ſe reduce es Enteros, la Frac-

Fraccion será impropria. Esta Regla se funda en que multiplicando Denominador, y Numerador por una misma quantidad, la Fraccion queda la misma; pues siendo $65 = \frac{65}{1}$, será

$$\frac{65 \times 32}{32} = \frac{65 \times 32}{1 \times 32} = \frac{2080}{32} = 65.$$

89 PROBLEMA II. *Reducir una quantidad Mixta à Fraccion impropria.*

Regla. *Como la quantidad Mixta consta de Entero, y Fraccion: Multipliquese el Entero por el Denominador de la Fraccion, sumese este producto con el Numerador, à esta suma pongasele por Denominador el de la Fraccion, y quedará la quantidad Mixta reducida à Fraccion.*

Assi reduciendo las quantidades Mixtas $4\frac{1}{5}$, $3\frac{1}{3}$, $6\frac{1}{10}$; $a + \frac{b}{c}$, $3x - \frac{b^2}{2n}$ à Fracciones improprias, tendrémos $4\frac{1}{5} = \frac{4 \times 5 + 1}{5} = \frac{21}{5}$, $3\frac{1}{3} = \frac{3 \times 3 + 1}{3} = \frac{10}{3}$, $6\frac{1}{10} = \frac{6 \times 10 + 1}{10} = \frac{61}{10}$, $a + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$, $3x - \frac{b^2}{2n} = \frac{6xn - b^2}{2n}$.

Esta operacion no es otra cosa, que reducir el Entero à Fraccion del mismo Denominador de la parte fraccional, y sumar ambas Fracciones, como verémos despues.

90 PROBLEMA III. *Reducir una Fraccion impro-*

impropria à una quantidad Mixta, ò Entero.

Regla. *Dividaſe el Numerador por el Denominador, y el Quociente ſerá el Entero, ò la quantidad Mixta.*

Aſſi $\frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$, $\frac{162}{3} = 54$, $\frac{ab+c^2}{b} = a+\frac{c^2}{b}$.

91 PROBLEMA IV. *Reducir dos, ò mas Fracciones de diferentes Denominadores à un miſmo Denominador.*

Regla. *Multipliqueſe cada Numerador por el producto de todos los otros Denominadores, excepto el proprio, y eſtos productos ſerán los nuevos Numeradores: Multipliquenſe todos los Denominadores entre sí, y ſu producto ſerá el Denominador comun.*

Hayanſe de reducir à un miſmo Denominador las Fracciones $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{d}$, el Denominador comun ſerá $c \times d = cd$, el Numerador de $\frac{a}{c}$ reducida, ſerá $a \times d$, y el de $\frac{b}{d}$ ſerá $b \times c$, y las Fracciones reducidas ſerán $\frac{a \times d}{c \times d} = \frac{a}{c}$, $\frac{b \times c}{d \times c} = \frac{b}{d}$. Que eſtas Fracciones tengan un miſmo Denominador ſe ve, porque en entrambas es cd. Que entrambas tengan un miſmo valor que antes, ſe demueſtra, porque $\frac{ad}{cd} = \frac{a \times d}{c \times d}$; pero una Fraccion no muda ſu valor, por mas que ſe multipliquen, ò dividan Nu-

Numerador, y Denominador por una miſma quantidad, como en eſte caſo por d: luego $\frac{a}{c} = \frac{a \times d}{c \times d}$.

En Fracciones Arithmeticas es lo miſmo, aſſi reduciendo à un miſmo Denominador las Fracciones Arithmeticas $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{6}{7}$, tendrémos

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2 \times 7}{4 \times 2 \times 7} = \frac{42}{56}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 4 \times 7}{2 \times 4 \times 7} = \frac{28}{56}$$

$$\frac{6}{7} = \frac{6 \times 2 \times 4}{7 \times 2 \times 4} = \frac{48}{56}$$

Eſta reduccion de Fracciones ſirve mucho, ya para las operaciones comunes, como verémos, ya para ver ſi una Fraccion es mayor, que otra; porque pueſtas eſtas dos Fracciones $\frac{3}{9}$, $\frac{5}{7}$, no ſe ve facilmente qual ſea mayor; pero ſi ſe reducen à un miſmo Denominador $\frac{21}{63}$, $\frac{45}{63}$, facilmente veo, que $\frac{45}{63}$ $(= \frac{5}{7})$ es mayor, que $\frac{21}{63}$ $(= \frac{3}{9})$.

92 PROBLEMA V. *Reducir una Fraccion à menor expreſſion, ò menos terminos.*

Regla. *Buſqueſe alguna comun medida, ò diviſor, que divida Numerador, y Denominador exactamente, y ſin reſta, los Quocientes reſpectivos ſerán Numerador, y Denominador de la Fraccion ya reducida à menor expreſſion.*

Si

Si la quantidad por quien entrambos ſe dividen, fueſſe ſu *mayor* comun medida, la Fraccion ſe reducirá à la *menor expreſſion poſſible*. Si no tienen alguna comun medida, excepto la unidad, ya no puede la Fraccion reducirſe à expreſſion menor.

Hayanſe de reducir à menor expreſſion las Fracciones $\frac{4}{12}$, $\frac{36}{48}$, $\frac{2520}{7560}$, $\frac{75abc}{125bcx}$. Dividiendo Numeradores, y Denominadores por ſu mayor comun medida, ſerán $\frac{4}{12} = \frac{4:4}{12:4} = \frac{1}{3}$, $\frac{36}{48} = \frac{36:12}{48:12} = \frac{3}{4}$, $\frac{2520}{7560} = \frac{2520:2520}{7560:2520} = \frac{1}{3}$, $\frac{75abc}{125bcx} = \frac{75abc:25bc}{125bcx:25bc} = \frac{3a}{5x}$.

Las Fracciones, ò bien incommenſurables, ò bien que no tienen otra comun medida, que la unidad, como $\frac{357}{4652}$, ya no ſe pueden reducir à menor expreſſion; y aſſi para ver ſi alguna Fraccion es reducible, es meneſter acudir à encontrar alguna comun medida de Numerador, y Denominador.

93 No obſtante la practica enſeña algunas Reglas particulares.

1°. *Todo numero Par ſe puede dividir por* 2; de donde ſi Numerador, y Denominador ſon numeros pares, la Fraccion ſe puede reducir à expreſſion menor, dividiendolos por 2.

2°. *Todo numero que acaba en* 0, *ſe puede dividir por* 5, *y por* 10; de donde ſi en Numerador, y Denominador hubieſſe à la fin

alguno, ò algunos ceros, la Fraccion ſe reduce à menor expreſsion, quitando igual numero de ceros de entrambos; porque eſto es dividirlos por 10, por 100, &c. Por lo tanto $\frac{1000}{4000} = \frac{1}{4}$.

3º. *Todo numero que acaba en 5, es diviſible por* 5; porque, ò es cinco, ò ſu multiplice.

4º. *El numero* 3 *divide qualquier quantidad, quando la ſuma de las cifras, de que ſe compone, tomadas ſeparadamente, forman un numero, que es diviſible por* 3. Aſsi 3 divide exactamente 471, porque $4 + 7 + 1 = 12$, que es diviſible por 3.

ARTICULO III.

De las quatro Reglas Arithmeticas por Fracciones comunes.

94 COmo las Fracciones, aſsi proprias, como improprias ſon quantidades, ſe pueden hacer con ellas todas las operaciones de la Arithmetica, y Algebra; por lo tanto ſe pueden Sumar, para ver juntas que quantidad hacen; ſe pueden Reſtar, para encontrar ſu diferencia; ſe pueden Multiplicar, para hallar ſu producto; y final-

finalmente ſe pueden Dividir, para ſaber quantas veces la una contiene la otra.

95 PROBLEMA I. *Sumar Fracciones, aſſi Arithmeticas, como Algebraicas.*

Regla. *Reduzganſe (ſi no lo eſtán ya) à un miſmo Denominador. Sumenſe los Numeradores, y à eſta ſuma pongaſele por Denominador, el Denominador comun. La Fraccion que reſulte, ſerá la Suma de las Fracciones dadas.*

Sumenſe $\frac{3}{5}$ con $\frac{4}{6}$, $\frac{3}{15}$ con $\frac{4}{13}$, $\frac{a}{b}$ con $\frac{d}{c}$, y $\frac{e}{b}$, ſerán $\frac{3}{5}+\frac{4}{6}=\frac{18+20}{30}=\frac{38}{30}=1\frac{8}{30}=1\frac{4}{15}$, $\frac{3}{15}+\frac{4}{13}=\frac{39+60}{195}=\frac{99}{195}=\frac{33}{65}$, $\frac{a}{b}+\frac{d}{c}+\frac{e}{b}=\frac{acb+b^2d+bce}{b^2c}$.

Si las quantidades, que ſe han de ſumar, fueſſen Mixtas, *ſumenſe primero los Enteros, y reduciendo las Fracciones, jantefe ſu ſuma à la de los Enteros.*

Aſsi $4\frac{5}{7}+16\frac{3}{4}=20+\frac{20+21}{28}=21\frac{13}{28}$.

96 PROBL. II. *Reſtar una Fraccion de otra.*

Regla. *Reducidas à un miſmo Denominador, reſtenſe los Numeradores, à la diferencia deſele por Denominador el Denominador comun, y eſta Fraccion ſerá la Diferencia de entrambas Fracciones dadas.*

Aſsi $\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=\frac{16-15}{20}=\frac{1}{20}$, $\frac{x}{45}-\frac{x}{4}=\frac{4x-45x}{180}=-\frac{41x}{180}$, y $-\frac{1}{2}\left(=4\frac{3-1}{5}\right)=\frac{15-1}{5}=4\frac{2}{5}$.

97 Para mayor inteligencia de la Multiplicacion, y Diviſion de las Fracciones ſe han de preſuponer los dos Lemmas ſiguientes.

LEMMA I. *Si el Numerador de una Fraccion ſe aumenta, quedando ſiempre el miſmo Denominador, el valor de la Fraccion ſe aumenta con la miſma proporcion, que dicho Numerador.*

Demos que en eſta Fraccion $\frac{1}{3}$ ſe vaya aumentando el Numerador de eſta ſuerte $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$. Es cierto, que $\frac{2}{3}$ es el duplo de $\frac{1}{3}$, porque ſu Numerador es tambien el duplo del de la otra, quedando el miſmo el Denominador; por la miſma razon $\frac{3}{3}$ es ſu triple. Y aſsi para tomar tres veces eſta Fraccion $\frac{1}{3}$ no hai ſino multiplicar ſu Numerador por 3, quedando el Denominador el miſmo: de donde, como el *multiplicar* una quantidad es *tomarla muchas veces*, ſale la ſiguiente:

Regla. *Para multiplicar una Fraccion por un Entero, multipliqueſe ſu Numerador por dicho Entero, al producto pongaſele por Denominador el de la Fraccion, y eſta nueva Fraccion ſera el Producto de la Fraccion dada por el Entero.*

98 LEMMA II. *En una Fraccion, quedando el Numerador el miſmo, ſu valor ſe diſminuye con la miſma proporcion, que ſe aumenta el Denominador.*

Sea eſta Fraccion $\frac{1}{1}$. Si à ſu Denominador lo aumento de una unidad, ſerá $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, y ſu valor ſerá la mitad menor. Si à ſu Denomina-

minador lo aumento de 2, será $\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$, que será un tercio de la primera, ò el Quociente de la primera dividida por 3: luego en general, para dividir una Fraccion por un Entero:

Regla. *Multipliquese el Denominador por el Entero, pongase este producto por Denominador, dexandole el Numerador mismo, y esta Fraccion será el Quociente.*

Mas como $\frac{1}{2} \times 2 = \frac{1 \times 2}{2} = \frac{2}{2} = 1 = \frac{1}{2 \div 2} = \frac{1}{1}$, *una Fraccion se puede multiplicar por un Entero de dos suertes, ò bien dexando el mismo Denominador, multiplicando el Numerador por el Entero, ò bien dexando el mismo Numerador, dividiendo por el Entero el Denominador dado.* Deshaciendo lo hecho, ò de la operacion inversa se sigue, que *una Fraccion se puede tambien de dos suertes dividir por un Entero, ò bien dividiendo por él el Numerador, dexando intacto el Denominador, ò bien dividiendo este, quedando el Numerador el mismo que antes.*

Pues $\frac{6}{7} : 2 = \frac{6 : 2}{7} = \frac{3}{7} = \frac{6}{7 \times 2} = \frac{6}{14}$.

Atendiendo, que una Fraccion tanto mas *crece*, quanto mas se *disminuye* el Denominador, y tanto mas *disminuye* su valor, quanto mas el Denominador *crece*, quedando siempre el Numerador el mismo, se sigue, que $\frac{1}{\infty} = 0$, y $\frac{1}{0} = \infty$, las quales locuciones, corrientes entre los Mathematicos, no se entienden con todo el rigor; porque de otra suerte se seguiria, que $1 = \infty \times 0 = 0$, que es fal-

falso, sino que $\frac{1}{\infty}$ es una Fraccion tan tenue, que, aunque en el calculo se desprecie del todo, ò se *suponga* $=0$, no induce error alguno notable, y assi dicen $\frac{1}{\infty}=0$, y al contrario, que dividida una quantidad por otra tan pequeña, que *apenas* se diferencie de 0, el Quociente, que exprime *quantas veces* el Denominador se incluye en el Numerador, ha de ser *infinito*; por lo tanto dicen $\frac{1}{0}=\infty$, en donde el Denominador 0 indica una quantidad tan tenue, que *apenas* se diferencia de 0. Esto supuesto.

99 PROBLEMA III. *Multiplicar Fracciones entre sí.*

Para entender bien la multiplicacion de Fracciones entre sí, y la razon en que se funda, es menester tener bien presente lo que es el Multiplicar, que es tomar el Multiplicando tantas veces, como *unidades* hai en el Multiplicador; de donde si multiplicamos una Fraccion por la unidad, el Producto será igual al mismo Multiplicando, ò será unicamente la misma Fraccion; si la multiplicamos por un numero *mayor*, que la unidad, por exemplo por 2, el Producto será *mayor*, que la Fraccion, pues será su duplo; pero si la multiplicamos por una quantidad *menor*, que la unidad, como es qualquier Fraccion propria, el Producto será *menor*, que la Fraccion, que se multiplica, de la misma suerte

que

que la Fraccion, que es el Multiplicador, es menor que la unidad; por lo tanto toda quantidad multiplicada por una Fraccion propria, dará un Producto *menor*, que el Multiplicando.

Assi si se multiplica $\frac{2}{3}$ por la mitad de la unidad $\frac{1}{2}$, el Producto será la mitad de dos tercios; pues el Multiplicando ha de estar en el Producto de la misma suerte, que la unidad está en el Multiplicador; pero sola la mitad de la unidad está en el Multiplicador $\frac{1}{2}$: luego tambien sola la $\frac{1}{2}$ del Multiplicando estará en el Producto; y assi el Producto solo será la mitad del Multiplicando.

Si el Multiplicador es $\frac{1}{3}$, el Producto solo será un tercio del Multiplicando, si es $\frac{2}{3}$ será dos tercios: luego en substancia *este multiplicar una Fraccion por otra Fraccion será dividir la Fraccion, que se multiplica, en tantas partes iguales, como indica el Denominador del Multiplicador, y tomar de estas partes tantas, como exprime el Numerador del Multiplicador mismo.* Pero una Fraccion se divide por un Entero, multiplicando el Denominador por él, y se multiplica, ò se toma tantas veces, como indica el Entero, multiplicando el Numerador de la Fraccion por dicho Entero: luego

Regla general. *Para Multiplicar una Fraccion por otra Fraccion, multipliquense entrambos*

bos Numeradores entre sí, y este producto será el Numerador del Producto; multipliquense tambien entre sí entrambos Denominadores, y este producto será el Denominador correspondiente.

Assi $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{4 \times 3} = \frac{2}{12}$, $\frac{25}{360} \times \frac{3}{4} = \frac{75}{1440} = \frac{5}{96}$,

$\frac{a-x}{d} \times \frac{a}{c} = \frac{a^2 - ax}{dc}$.

100 PROBLEMA IV. *Dividir una Fraccion por otra.*

Regla. *Inviertase el Divisor, haciendo del Numerador Denominador, y del Denominador Numerador; multiplíquese el Divisor assi inverso por el Dividendo, y su producto será el Quociente.*

De esta suerte $\frac{4}{5} : \frac{3}{4} = \frac{4 \times 4}{5 \times 3} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}$,

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{cb}$.

No hai que estrañar, que algunas veces el Quociente sea mayor, que el Dividendo, como el quociente de $\frac{4}{5} : \frac{3}{4} = 1\frac{1}{15}$, que es mayor, que $\frac{4}{5}$; porque el quociente solo debe exprimir, quantas veces el Dividendo incluye el Divisor; y aunque en las Fracciones proprias el Dividendo sea menor, que la unidad, no obstante puede contener una, ò muchas veces otra Fraccion inferior, por consiguiente será el quociente 1, 2, &c.

La Demonstracion de esta Regla es la general de la Division, que el Quociente debe ser

ſer una quantidad, que multiplicada por el Diviſor, dé por producto el Dividendo. Aſſi el Quociente $\frac{ad}{cb}$ multiplicado por el Diviſor $\frac{c}{d}$, dará por producto el Dividendo $\frac{ad}{cb} \times \frac{c}{d} = \frac{adc}{cbd} = \frac{a}{b}$.

Eſtas dos Reglas de Multiplicacion, y Diviſion de Fracciones ſe eſtienden tambien à las Fracciones improprias; de donde para multiplicar, y dividir quantidades Mixtas es buen methodo el reducirlas à Fracciones improprias, Comunes, ò Decimales; pero adviertaſe, que el producto de una Vara *Linear* por otra *Linear*, es una Vara *Quadrada*; el de un Pie *Linear* por otro, es un Pie *Quadrado*, &c. De donde ſiendo el Pie *Linear* $\frac{1}{3}$ de Vara *Linear*, ſerá el Pie *Quadrado* $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ de Vara *Quadrada*; aſſimiſmo una Pulgada ſerá $\frac{1}{12 \times 12} = \frac{1}{144}$ de Pie *Quadrado*, y $\frac{1}{11 \times 9} = \frac{1}{1296}$ de Vara *Quadrada*.

Mas ſi ſe multiplica una Vara *Quadrada* por una *Linear*, el producto ſerá una Vara *Cubica*; por conſiguiente el Pie *Cubico* ſerá $\frac{1}{27}$ de Vara *Cubica*, &c.

Eſto ſe ha de tener preſente, para evitar equivocacion en la Multiplicacion, y Diviſion de Quebrados.

CAPI-

CAPITULO VI.

De las Fracciones Decimales.

101 LAS *Fracciones Decimales* ſon las mas utiles para el Calculo, por ſer mas expedito el modo de obrar por ellas, y lograrſe con eſte methodo mayor limpieza, y conciſion, que con las Fracciones comunes.

ARTICULO PRIMERO.

Explicanſe las Fracciones Decimales, y ſu formacion.

102 QUalquier quantidad, aſſi entera, como quebrada, reteniendo el miſmo valor, ſe puede reducir à qualquier genero de Fracciones, eſto es, à Fraccion de qualquier Denominador determinado, con tal que ſe le buſque proporcionado Numerador: luego tambien ſe podrá reducir à una Fraccion, que tenga por Denominador 10, ò alguna Potencia de 10, eſto es, 100, 1000, 10000, &c. *Eſtas Fracciones pues que tengan por Denominador* 10, *ò alguna Potencia*

cia de 10, *ſon las que llamamos Fracciones Decimales.*

103 En eſta materia de *Decimales* el Entero, ò la unidad ſe concibe como dividida en *diez* partes iguales, aſſi $1 = \frac{10}{10}$, cada una de eſtas partes ſe concibe tambien dividida en otras *diez* partes, que por conſiguiente ſerán *Centeſimas* del entero, cada una de eſtas diez ultimas partes, decimas de las décimas, ò centeſimas del entero, ſe concibe tambien dividida en otras *diez* partes, que ſerán ya *Mileſimas* del entero, y aſſi al infinito, proſiguiendo à *Diezmileſimas*, *Cienmileſimas*, *&c.*

104 Eſto preſupueſto, ſiendo qualquier Fraccion comun igual al quociente, que reſulta por la actual diviſion del Numerador por el Denominador, ſi la Fraccion es propria, eſta diviſion no tendrá lugar, quedando el Numerador en linea de Enteros, ò de unidades, y aſſi ſe habrá eſte Numerador de reducir à eſpecies inferiores, que en eſte caſo es à ſus *partes decimas*; por lo tanto, ſiendo cada unidad *diez decimas*, añadiendo al Numerador un 0, tendré el numero de decimas à quien equivale, y haciendo la actual diviſion, la figura que ſalga en el quociente, indicará *quantas de eſtas decimas* correſpondan à cada unidad del Denominador, que en eſte caſo es el Diviſor.

Si

Si hecha esta primera division, resta algo, esta resta serán *decimas partes* de la unidad, y como el numero de esta resta es menor, que el numero del Divisor, para que la division se pueda proseguir, se habrán de reducir estas decimas partes à especies inferiores, esto es, añadiendo un o à sus decimas, que por consiguiente serán ya *centesimas* de la unidad, y assi haciendo la division, la figura que salga en el quociente exprimirá *centesimas* de la unidad; y prosiguiendo de la misma suerte, si hai alguna resta, la otra indicará *milesimas*, &c.

Assi $\frac{3}{4}$ es igual al quociente que resulta, dividiendo 3 por 4.; pero si el Numerador 3 se queda en expresion de *unidades*, la division no se puede executar: mas teniendo presente, que 3 *unidades* es lo mismo que 30 *decimas* de la unidad, y que añadiendo al Numerador (3) un o, tengo el numero de *decimas* à que equivale, lo añado, y haciendo la division, el quociente 7 que sale, exprimirá 7 *decimas*, y la resta 2, serán 2 *decimas*, que se habrán de dividir aun por 4: Pero atendiendo que el numero de *decimas* que resta, es menor que el Denominador, ò Divisor, lo reduzgo à especies inferiores, esto es, añadiendo un o à sus decimas, que por consiguiente serán *centesimas* de la unidad, y haciendo la division, la figura 5, que sale en el quo-

quociente, exprimirá *centeſimas* de la unidad, y no habiendo ya reſta alguna, ſerá $\frac{3}{4} = \frac{7}{10} + \frac{5}{100}$; pero $\frac{7}{10} = \frac{70}{100}$: luego $\frac{7}{10} + \frac{5}{100} = \frac{70}{100} + \frac{5}{100} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$.

En eſta ultima expreſſion $\frac{75}{100}$ reparo (y es lo que ſucede en toda Fraccion Decimal propria) que ſiempre *el Denominador de qualquier Fraccion Decimal propria conſta preciſamente de la unidad* (1), *y de tantos ceros, como figuras, ò châractéres hai en el Numerador.*

Eſto aſſentado, viendo quantos châractéres hai en el Numerador, ſerá ocioſo poner el Denominador, y aſſi ſe omite, por tenerſe preſente, que es 1 con tantos ceros, quantas figuras el Numerador contiene. Aſſi $\frac{547}{1000} = .547$, poniendo un puntico antes, para indicar, que las figuras que ſiguen al puntico, ſon *Numerador de Decimales*, y no cifras de Enteros.

105 Es digno de repararſe en las figuras, que exprimen las Decimales, que aſſi como las figuras, ſignificando Enteros, aumentan de diez ſu valor, ò crecen *en el valor decuplo*, quanto mas van diſtando ácia la izquierda de la figura, que exprime las unidades; aſſimiſmo las figuras, que ſignifican Decimales, van *diſminuyendo* ſu valor en *proporcion ſubdecupla*, ò *diez veces menos*, quanto mas van diſtando ácia la derecha de la cifra, que ſignifica unidades.

Aſſi

Aſſi en eſta partida 65.43, las 65 ſignifican los Enteros, las .43 ſignifican las Decimales, la cifra que exprime las *unidades* es el 5, el 6 ſignifica ſeis *decenas* de unidades, eſto es 60, porque diſta un grado *ácia la izquierda* de la cifra (5) de unidades, el 4 no ſignifica ya unidades, ſino *decimas* partes de la unidad, que en eſte caſo ſon quatro (4), el 3 ya ſignifica menos, porque ſignifica *centeſimas*, y todo junto .43 ſignifica quatro decimas, y tres centeſimas partes de la unidad, que es quarenta y tres *centeſimas*; porque $.43 = \frac{4}{10} + \frac{3}{100} = \frac{40}{100} + \frac{3}{100} = \frac{43}{100}$.

En eſta Tabla ſe ve el valor de cada cifra, ſegun ſu reſpectiva diſtancia de la cifra de *unidades*.

Cienmiles.	*Diezmiles.*	*Miles.*	*Centenas.*	*Decenas.*	UNIDADES.	*Decimas.*	*Centeſimas.*	*Mileſimas.*	*Diezmileſimas.*	*Cienmileſimas.*
6	5	4	3	2	(1)	2	3	4	5	6
Numeros			*Enteros*		.	*Partes*			*Decimales.*	

106 Leido un Exemplo de Enteros, y Decimales, ſe aprende à leer qualquier otro. Las partidas Decimales ſe leen, ò bien tomando cada cifra ſeparadamente, dandole la denominacion de la qualidad de partes, que exprime, y en eſte caſo la partida 345.6734 ſe

ſe lee aſſi *treſcientas quarenta y cinco* (unidades) *ſeis decimas, ſiete centeſimas, tres mileſimas, quatro diezmileſimas partes de la unidad*, ò de uno; ò bien mas breve, como ſe acoſtumbra, leyendo las tales cifras como ſi fueſſen Enteros, tomando la denominacion de la qualidad de partes, que ſignifica la ultima cifra, aſſi dicha partida .6734 ſe lee *ſeis mil ſetecientas treinta y quatro diezmileſimas*, por exprimir diezmileſimas la ultima cifra 4.

La razon de eſte ultimo modo de leer, que es el comun, es, porque $.6734 = \frac{6}{10} + \frac{7}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{4}{10000}$, reduciendo pues todas eſtas Fracciones à un miſmo Denominador, eſto es al de la ultima, ſerán $\frac{6}{10} = \frac{6000}{10000}$, $\frac{7}{100} = \frac{700}{10000}$, $\frac{3}{1000} = \frac{30}{10000}$, $\frac{4}{10000}$, ſumandolas todas, ſerán $\frac{6734}{10000} = .6734$.

ARTICULO II.

De las quatro Operaciones Arithmeticas por las Fracciones Decimales.

107 PAra obrar por las Fracciones Decimales, es meneſter reducir las Fracciones comunes à Decimales, con las quales ſe pueden hacer todas las operaciones, y la principal ventaja es, que en ellas las operaciones ſe hacen de la miſma ſuerte que

que en los Enteros, ſin amontonar tantas cifras, como es neceſſario en las Fracciones comunes.

108 PROBLEMA I. *Reducir las Fracciones comunes proprias à Fracciones Decimales.*

Como el valor de una Fraccion comun es el miſmo quociente que reſulta, dividiendo el Numerador por el Denominador, ſe habrá, para eſta diviſion (que dará por quociente la Fraccion Decimal) de reducir el Numerador à eſpecies inferiores, que ſerá à *decimas, centeſimas, &c.* pero para eſta reduccion ſe habrá de multiplicar el Numerador por 10, ò ſus Potencias: luego para reducir una Fraccion comun propria à Fraccion Decimal:

Regla. *Añadanſe al Numerador tantos ceros, quantos ſe quiera, dividaſe el Numerador, aſſi pueſto, por el Denominador, y el quociente ſerá la Fraccion Decimal equivalente, ò igual à la Fraccion comun propueſta.*

Reduciendo las Fracciones comunes $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ à Decimales, la operacion es como ſe ſigue.

4)1.00(0.25	4)3.00(0.75	6)5.00(0.833 &c.
8	28	48
20	20	20
20	20	18
0	0	20

Eſto es $\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{3}{4} = 0.75$, $\frac{5}{6} = 0.8333$ &c.

Se

Se pone un o en el quociente en lugar de los Enteros, para ſignificar, que no hai Entero alguno, ni unidad, pues de otra ſuerte no ſería Fraccion pura la propueſta; por conſiguiente todas las demás cifras ſon Decimales: algunas veces ſe omite dicho cero de Enteros, por ſuponerſe.

109 Si hechas las diviſiones, no hai reſta alguna, como en el primero, y ſegundo Exemplo, entonces las Fracciones Decimales ſon en todo exactas, y *abſolutamente iguales* à las Fracciones comunes propueſtas. Pero ſi por mas que ſe divida, ſiempre hai alguna reſta, como en el tercer Exemplo, en tales caſos la Fraccion Decimal jamás ſerá *del todo exacta*, ò igual à la Fraccion comun propueſta; pero ſe acercará tanto mas à la exactitud, quanto mas ſe proſiga la diviſion. Para la practica llegando à quatro, ò cinco cifras, no ſe proſigue à mas, por haberſe llegado ya à una exactitud ſuficiente. Como en el tercer Exemplo llegando ſolamente à cinco cifras, ſu diferencia de la exactitud no llega à una *cienmileſima parte de la unidad*; porque la ultima cifra contiene ya todas las cienmileſimas, y aſſi todo lo que ſe ſiguiera, proſiguiendo la diviſion, no llegaria junto à hacer una *cienmileſima*, por eſſo ſe deſprecia.

110 *Si la Fraction, que ſe debe reducir à Decimales, fueſſe impropria, reduzgaſe prime-*

ro à quantidad Mixta de Entero, y Fraccion comun, y la parte fraccional, que ſerá ya Fraccion propria, ſe podrá reducir por el Problema precedente. Aſſi $\frac{11}{9} = 1\frac{2}{9} = 1.22222$ &c.

Como los *Pies* ſon Fracciones de *Varas*, las *Horas* Fracciones de *Dias*, los *Minutos* de *Horas*, las *Monedas*, y *Peſos inferiores de ſuperiores*; y en general qualquier quantidad inferior lo es de una ſuperior, *toda quantidad ſe podrá exprimir por Fracciones Decimales de aquella, de quien es Fraccion comun.* Aſſi una Pulgada ſe reduce à Fraccion Decimal de Pie, conſiderandola como $\frac{1}{12}$ de Pie, y à Fraccion Decimal de Vara, conſiderandola como $\frac{1}{36}$; por lo tanto 1 *Pulgada* = 0.08333 &c. de *Pie*, = 0.02777 &c. de *Vara.*

Reducidas ya las quantidades à expreſſiones Decimales, ſolo falta el enſeñar las Operaciones Arithmeticas con ſemejantes Fracciones.

111 PROBLEMA II. *Sumar Fracciones Decimales.*

Regla. *Ponganſe las partidas como ſi fueſſen numeros Enteros*, eſto es, *unidades* (ſi las hai) *baxo unidades, partes decimas baxo partes decimas, centeſimas baxo centeſimas, &c. Sumenſe eſtas partidas en todo como los Enteros. De la Suma total ſeparenſe ácia la derecha con un puntico para Decimales tantas cifras, quantas hai de Decimales en la partida en que mas cifras*

cifras Decimales hai, ò lo que es lo mismo *en la Suma las cifras, que estén directamente baxo los Enteros, serán Enteros, las que estén baxo las Decimales, serán Decimales de la misma especie.*

EXEMPLOS.

	2.345	.324	.301
	0.6934	6.002	.4536
	12.52378	15.0423	.032
Sumas	15.56218	21.3683	0.7866

112 PROBLEMA III. *Restar Fracciones Decimales.*

Regla. *Puestas las partidas como en el Sumar, y la menor baxo la mayor, hagase la Resta como en el Restar de Enteros, y las cifras, que en el Residuo, ò Diferencia estén immediatamente baxo las Decimales, serán tambien Decimales de la misma especie.*

EXEMPLOS.

	.356	2.435	24.9032
	.234	1.9234	5.894
Restas	0.122	0.5116	19.0092

Pero adviertase, que entre las partidas Decimales, ò Mixtas no siempre aquella es ma-

yor, en que hai mas cifras, ſino aquella, ò bien en que hai mas unidades (ſi las hai) ò bien ſi ſolo hai Decimales, aquella en que la cifra, que exprime las *decimas*, es mayor, ò ſi faltan eſtas, aquella que exprime las *centeſimas, &c.* Aſsi eſta quantidad .39 es mayor, que eſta .2945, en la qual las tres ultimas cifras 945 aun no llegan à hacer una *decima*, por lo tanto ſolo hai *dos* decimas, y algunas partes de una decima, quando en la otra hai *tres* decimas, y nueve centeſimas.

113 PROBLEMA IV. *Multiplicar entre sí Fracciones Decimales proprias, ò improprias, ò bien Decimales por Enteros.*

Regla. *Ponganſe los Factores, y multipliquenſe entre sí en todo como ſi fueſſen Enteros, del Producto total ſeparenſe con un puntico para Decimales tantas figuras, quantos châracteres de Decimales hai en los dos Factores juntos, y las otras ſerán de Enteros.*

EXEMPLOS.

3.65	0.32
× .33	× 0.54
1095	128
1095	160
1.2045	.1728

Como cada uno de los Factores del primer Exemplo tiene *dos* figuras Decimales, el Producto

ducto habrá de tener *quatro*, y la que queda (1) ſerá de Enteros. En el ſegundo Exemplo no hai Entero alguno; pero como en los dos Factores hai quatro Decimales, igual numero ſe habrán de ſeparar del Producto.

Para que ſe vea la razon de eſta operacion, reduzganſe los Factores del primer Exemplo à Fracciones comunes, ſerán $3.65 = \frac{365}{100}$, y $.33 = \frac{33}{100}$, el Producto de entrambas $\frac{365}{100} \times \frac{33}{100} = \frac{12045}{10000}$. Eſta quantidad es Fraccion impropria, reduzgaſe à quantidad Mixta por la actual diviſion del Numerador por el Denominador, y el quociente ſerá $1\frac{2045}{10000} = 1.2045$.

Porque como para dividir una quantidad por 10, baſta ſepararle una figura con un puntico, para dividir por 100, baſta ſeparar-le dos, &c. para dividir por qualeſquiera Potencias de 10 (quales ſon los Denominadores de las Fracciones Decimales) ſe habrán de ſeparar del Numerador del Producto tantas figuras, quantos ceros habia de haber en el Denominador, ò Diviſor; pero en el Denominador del Producto de Decimales hai tantos ceros, quantas figuras de Decimales hai en entrambos Factores juntos: luego en la Multiplicacion de Decimales, encontrado el Producto, como en los Enteros, ſe habrán de ſeparar para Decimales tantas cifras, como figuras de Decimales habia en entrambos Factores juntos.

Por

Por la misma razon *si en el Producto no hubiesse bastantes cifras, para separar en él para Decimales tantas, quantas hai en entrambos Factores juntos, añadanse al principio del Producto ceros, hasta que iguale.* Assi multiplicando .456 por .213, el Producto da 97128; pero porque en entrambos Factores juntos hai *seis* Decimales, y en el Producto solo hai *cinco* cifras, para poder quitar seis, como se requiere, añado un cero al principio, y tengo por verdadero Producto .097128 = .456 x .213.

114 PROBLEMA V. *Dividir Fracciones Decimales proprias, ò improprias por otras Decimales proprias, ò improprias.*

Regla. *Hagase en todo la division, como si fuessen todas las cifras de Enteros, y en el Quociente separense para Decimales tantas, quantas el Dividendo tiene mas que el Divisor.*

Esto es, si el Dividendo tiene tres figuras de Decimales, y el Divisor una, hecha la division separense en el Quociente dos cifras para Decimales, las demás serán de Enteros.

Hayase de dividir 10.488 por 2.3. Tomo las partidas como si en ellas todas las figuras fuessen de Enteros, esto es, divido 10488 por 23, el Quociente me da 456; como en el Dividendo habia tres figuras de Decimales, y en el Divisor solo una, el Quociente habrá de tener dos Decimales, pues

las

las ſeparo con un puntico en el Quociente encontrado, y tengo por verdadero Quociente 4.56.

La razon de eſta operacion es, porque en el Quociente ha de haber tantas Decimales, que juntas con las del Diviſor igualen al numero de Decimales, que hai en el Dividendo, por ſer el Quociente, y el Diviſor los dos Factores, que dan por producto al Dividendo.

Pero ſi en el Dividendo, ò no hubieſſe Decimal alguna (como en el 1º. y 2º. Exemplo de los que ſe ſiguen) ò no hubieſſe à lo menos tantas como en el Diviſor (como en el Exemplo 7º. y 8º.) añadanſele al Dividendo quantos ceros ſe quiera para Decimales, y guardeſe la Regla dada.

Si en Quociente, y Diviſor juntos no hubieſſe tantas Decimales, quantas hai en el Dividendo (como en el 3º. y 4º. Exemplo) añadanſe al *principio* del Quociente tantos ceros para Decimales, quantos ſon meneſter, para que las Decimales del Quociente, y las del Diviſor juntas ſean iguales en numero à las figuras Decimales del Dividendo.

Aſſi dividiendo .360 por 24, el Quociente es 15; pero porque en 15 no hai baſtantes figuras, para que de él ſe quiten tantas para Decimales, quantas ſon meneſter, para que juntas con las del Diviſor igualen al numero

ro de Decimales del Dividendo, añado al principio del 15 un 0, y tengo por verdadero Quociente .015 = $\frac{360}{24}$.

EXEMPLOS.

.36) 45.00 (125.	.063) .4050 (6.428
.02) 31.00 (1550.	53.6) 45.89 (0.856
24) .360 (0.015	.03) 69.20 (2306.66 &c.
45) .0302 (.0006	.003) 84.70 (28233.3 &c.

115 PROBLEMA VI. *Reducir Fracciones Decimales de especie superior à Enteros, y Decimales de especie inferior.*

Regla. *Multipliquense las Decimales de especie superior por el numero de especies inferiores, que hacen una superior, el producto será los Enteros, y Decimales de la especie inferior, que hacen las Decimales dadas de especie superior.*

Assi tengo .348 *de Libra*, que quiero reducir à *Sueldos*, y *decimales de Sueldos*; pues las multiplico por 20, porque 20 *Sueldos* hacen una *Libra*, y el producto 6.96, será los Sueldos, y decimales de Sueldos, à que equivalen las .348 de Libra. Quiero la misma quantidad reducirla à *Dineros*; pues la multiplico por 240, y su producto 83.52, será los *Dineros*, y *decimales de Dineros*, à que .348 de Libra equivalen.

La razon de esto es, porque assi como multiplicando los Enteros de *Libras* por el numero

ro

ro de *Sueldos*, que hace una *Libra*, el producto es el Entero de Sueldos, que hacen las Libras que multiplico: assi multiplicando las *decimales de Libra* por el numero de Sueldos, que hace una Libra, el producto será las decimales de Sueldo, que hacen las decimales de Libra.

116 PROBLEMA VII. *Reducir los Enteros, y Decimales de especie inferior, à Enteros, y Decimales de especie superior.*

Regla. *Dividanse los Enteros, y Decimales de especie inferior por el numero de Enteros de especie inferior, que hacen un Entero de la especie superior, el quociente serán los Enteros, y Decimales de la especie superior, à que equivalen los Enteros, y Decimales inferiores dados.*

Tenga 6.96 *Sueldos*, que quiera reducir à *decimales de Libra*. Dividiendo segun las Reglas de Division de Decimales la quantidad dada por 20, tengo .348 decimales de *Libra*, à quien equivalen 6.96 decimales de *Sueldo*. Tenga 83.52 de *Dineros*, y las quiera reducir à decimales de *Libra*; dividiendolas por 240, tendré .348 de *Libra*. Esta Regla es la inversa de la primera.

117 Quien quiera ver esta *Arithmetica de Decimales* tratada mui à la larga, y aplicada à varios puntos de Mathematica, y Comercio, lea el *New Compleat, and Universal Syſtem, or Body of Decimal Arithmetick by Benjamin Martin*, impresso en Londres.

CAPI-

CAPITULO VII.

De las Razones, y Proporciones.

EL Arte de diſcurrir en todas las Mathematicas es combinar unas quantidades con otras, lo que ſe hace con la doctrina de las *Razones*, y *Proporciones*, por lo tanto eſta es una de las partes mas eſſenciales de los Elementos.

ARTICULO PRIMERO.

De las Razones, y ſus diferentes eſpecies.

118 *RAzon* de una quantidad à otra es *el modo, con que una quantidad ſe ha reſpeto de otra de la miſma eſpecie en orden à la magnitud*, eſto es, *ſi le es igual, mayor, ò menor, y quanto*? De ahí ſe ve, que quando cotejamos una quantidad con otra de ſu miſma eſpecie, podemos buſcar dos coſas: la una, preciſamente ſi una quantidad es *mayor que otra*? *Eſte modo pues con que la tal quantidad ſe ha reſpeto de la otra en orden à ſu Diferencia, ò Exceſſo*, ſe llama *Razon Arithmetica*:

metica: la otra cosa que podemos buscar, es, *quantas veces una quantidad contiene la otra*, ò mas en general, *qual es el quociente de una quantidad dividida por la otra? Y esta relacion de una quantidad à otra en orden à su Quociente se llama Razon Geometrica.*

119 Por lo tanto toda Razon requiere dos terminos; el uno el que se compara, y se llama *Antecedente* de la Razon; el otro es à quien el Antecedente se compara, y se llama el *Consiguiente*. La Razon Arithmetica se conoce qual sea, por el Restar, sacando la quantidad menor de la mayor. La Razon Geometrica se conoce por el Dividir, partiendo el Antecedente por el Consiguiente, y la *diferencia* en la una, y el *quociente* en la otra será el *Exponente*, ò *Denominador* de la Razon, porque *expondrán, y declararán, qual esta Razon sea*. Si se compara la quantidad menor à la mayor, la Razon será *de menor desigualdad*; si se compara la mayor à la menor, será *de mayor desigualdad*; finalmente si las quantidades que se comparan son iguales, la Razon será *de igualdad*.

120 Del modo con que una quantidad contiene la otra, la Razon Geometrica toma diferentes nombres. Se llama Razon *Multiplice*, quando el antecedente contiene muchas veces al consiguiente; en particular se llama *Dupla*, quando lo contiene dos veces; *Tripla*,

pla, quando lo contiene tres, &c. Al contrario ſe llama *Submultiplice*, quando el antecedente eſtá contenido algunas veces en el conſiguiente; en particular ſe llama *Subdupla*, quando eſtá contenido dos veces; *Subtripla*, quando tres, &c. Y finalmente *el antecedente de la Razon es tantuplo, ò ſubtantuplo de ſu conſiguiente, quantuplo, ò ſubquantuplo es reſpecto de la unidad, el quociente del antecedente dividido por el conſiguiente.* De aquí es, que ſi eſte Quociente, ò Exponente es termino racional, la Razon ſerá *Racional*, ſi es irracional, la Razon ſerá *Irracional*, ò *Incommenſurable*.

Algunas veces por no entretenerſe en buſcar qual ſea la Razon de un termino à otro, ò por no tener termino particular, con que exprimirſe, ſe ſeñala otra Razon, à quien es ſemejante. Por exemplo A es à B, como 6 à 5, es decir, que la Razon de A à B es igual à la Razon, que tiene 6 à 5. La Razon Geometrica ſe exprime à manera de Fraccion, en que el numerador es el Antecedente, y el denominador el Conſiguiente. Aſſi $\frac{a}{b}$, ò $a : b$, quiere decir la Razon de a à b.

121 Las Razones ſe pueden comparar unas con otras, eſto es, Arithmetica con Arithmetica, Geometrica con Geometrica. Una Razon Arithmetica es *mayor* que otra, *quando el antecedente de la una excede mas à ſu conſi-*

conſiguiente (ò es menos excedido de eſte) que el antecedente de la otra al ſuyo. Aſſi 6 à 3 es mayor, que 4 à 3, pues la diferencia de 6 à 3 es 3, y la de 4 à 3 no es ſino 1; la de 3 à 4 es mayor, que la de 3 à 6, pues $3-4=-1$, $3-6=-3$, y $-3<-1$. Una Razon Arithmetica es *menor* que otra, *quando el antecedente excede menos, ò es mas excedido de ſu conſiguiente, que el antecedente de la otra del ſuyo.*

Una Razon Geometrica es *mayor* que otra, *quando ſu antecedente contiene mas, ò mas veces à ſu conſiguiente (ò bien eſtá menos contenido en eſte) que el antecedente de la otra al ſuyo.* Por lo tanto 12 à 4 es mayor, que 8 à 3, pues 12 contiene à 4 tres veces, y 8 no contiene tantas veces à 3; pero la de 3 à 8 es mayor, que la de 4 à 12, pues $\frac{3}{8}>\frac{1}{3}$. Al contrario una Razon Geometrica es *menor* que otra, *quando el antecedente contiene menos (ò es mas veces contenido) à ſu conſiguiente, que el antecedente de la otra al ſuyo.* La razon de 4 à 28 es menor, que de 4 à 12, pues 4 es $\frac{1}{7}$ de 28, y $\frac{1}{3}$ de 12.

122 *Quando el antecedente de una Razon contiene (ò es contenido) à ſu conſiguiente igual numero de veces, que el antecedente de otra Razon al ſuyo, entrambas Razones ſon iguales.* Eſta igualdad, ò desigualdad de Razones ſe exprime por los ſignos comunes de Algebra para ſignificar igualdad, ò desigualdad. Por

lo

lo tanto $a:b \rhd c:d$, ſignifica, que la Razon de a à b es *mayor*, que la de c à d; al contrario $a:b \lhd c:d$, que es *menor*; finalmente $a:b = c:d$, que es igual. Eſta igualdad de Razones por lo comun ſe exprime aſſi (::)

ARTICULO II.

De las Proporciones en Comun.

123 QUando dos Razones ſon iguales, las quantidades, que las componen, eſtán en *proporcion*, y ſe llaman *Proporcionales*, pues *eſta igualdad de Razones* ſe llama *Proporcion*. Los Antecedentes de entrambas ſe llaman terminos *homologos entre sí*, eſto es, de una miſma denominacion, por ocupar entrambos el lugar de antecedentes, de la miſma ſuerte los Conſiguientes ſon entre sí homologos; y ſegun las Razones, que componen la Proporcion, ſean Arithmeticas, ò Geometricas, ſerá *Arithmetica*, ò *Geometrica* la Proporcion.

124 Como toda Proporcion pide neceſſariamente dos Razones, debe tambien tener dos antecedentes, y dos conſiguientes; pero alguna vez el conſiguiente de una Razon puede ſer antecedente de la otra, y entonces la Proporcion es *continua*. Por ſer en eſta Proporcion

porcion 8 : 4 :: 4 : 2, el 4 antecedente de la primera razon, y consiguiente de la segunda, la Proporcion es *continua*, que para abreviar, siendo Geometrica, se pone assi ∴ 8 : 4 : 2, y ÷ 6 . 4 . 2, si es Arithmetica. El segundo termino 4, que es consiguiente de una Razon, y antecedente de la otra, se llama *Medio proporcional*, ò Arithmetico, ò Geometrico, segun sea la Proporcion; de la misma suerte el tercero (2) *Tercero proporcional*.

125 Pero si cada Razon tiene sus terminos distintos la una de la otra, como en estas 12 : 4 :: 9 : 3, la Proporcion es *discreta*, en la qual el primero, y ultimo termino se llaman *Extremos*, y los otros dos *Medios*. Si una Proporcion *continua* qualquiera prosigue à mas de tres terminos, guardando siempre una misma ley, ò Razon, que es lo mismo, esta Série de terminos formará una *Progression*, *creciente* si los terminos van succesivamente aumentando, *decreciente* si van disminuyendo; pues la Progression es una *continuada Proporcion*. Esto es general en toda Proporcion; pero en adelante hablarémos solo de la Proporcion Geometrica, que se entiende con nombre de *Proporcion*, si no se expressa lo contrario.

126 Como la Proporcion consta de igualdad de Razones, toda la dificultad en este punto consiste en buscar esta igualdad, y dada ella

entre

entre algunas quantidades, inferirla aun en caſo que ſe *aumenten*, ò *diſminuyan*, ſe *multipliquen*, ò *dividan*, ò ſe *invierta el orden* de las quantidades, que la componen. Para eſto es meneſter ſuponer los Axiomas, y Definiciones ſiguientes.

AXIOMAS.

1º. *Si dos Razones ſon ſemejantes, ò iguales* (que aquí es lo miſmo) *à una tercera, ſon tambien ſemejantes entre sí.* De donde ſi $a:b::c:d$, y $e:f::c:d$, ſerá tambien $a:b::e:f$.

2º. *Dos quantidades iguales tienen una miſma Razon à otra tercera, y à las iguales à eſta tercera.* Y al contrario *Una quantidad, ò ſus iguales, tiene una miſma Razon à quantidades iguales.* Pues ſi dos quantidades iguales ſe dividen por una miſma tercera, los quocientes, que ſon los Exponentes de la Razon, ſerán los miſmos. De donde ſi $a=b$, ſerá $a:d::b:d$, aſſimiſmo $d:a::d:b$.

3º. *Si una quantidad tiene una miſma Razon à dos, ò mas quantidades diferentes, eſtas quantidades ſon entre sí iguales.* Pues en tal caſo la tal quantidad contiene, ò es contenida por las otras de la miſma ſuerte, lo que no puede ſer, ſino ſiendo eſtas otras iguales. Por lo tanto ſi $a:b::a:c$, luego $b=c$.

DEFI-

DEFINICIONES.

127 1ª. *Proporcion Alternada* es, quando de que quatro quantidades eſtén en proporcion, eſto es, la primera à la ſegunda, como la tercera à la quarta, ſe infiere, *que tambien la primera es à la tercera, como la ſegunda à la quarta.* Eſte modo de inferir ſe llama *Alternando*, ò *Permutando.*

2ª. *Proporcion Inverſa* es, quando de que quatro quantidades eſtén en proporcion, ſe infiere, *que tambien la ſegunda es à la primera, como la quarta à la tercera.* Eſte modo de inferir ſe llama *Invirtiendo.*

3ª. *Compoſicion de Proporcion* es, quando de que quatro quantidades eſtén en proporcion, ſe infiere, *que tambien la Suma de la primera, y de la ſegunda es à la primera, ò à la ſegunda, como la Suma de la tercera, y de la quarta es à la tercera, ò à la quarta.* Eſte modo de inferir ſe llama *Componiendo.*

4ª. *Diviſion de Proporcion* es, quando de que quatro quantidades eſtén en proporcion, ſe infiere, *que tambien el Exceſſo de la primera ſobre la ſegunda es à la primera, ò à la ſegunda, como el Exceſſo de la tercera ſobre la quarta es à la tercera, ò à la quarta.* Eſte modo de inferir ſe llama *Dividiendo.*

5ª. *Converſion de Proporcion* es, quando de

que quatro quantidades eſtén en proporcion, ſe infiere, *que tambien la primera, ò la ſegunda es al Exceſſo de la primera ſobre la ſegunda, como la tercera, ò la quarta es al Exceſſo de la tercera ſobre la quarta.* Eſte modo de inferir ſe llama *Convirtiendo.*

Todas eſtas cinco eſpecies de Proporcion toman ſu nombre del modo de inferirſe, y neceſſariamente ſe ſiguen de qualquier Proporcion comun, como verémos, y aſſi ſi tenemos una Proporcion, podrémos hacer todas las combinaciones ſiguientes.

Si $a : b :: c : d$

Alternando $a : c :: b : d$

Invirtiendo $b : a :: d : c$

Componiendo $\begin{cases} a+b : a :: c+d : c \\ a+b : b :: c+d : d \end{cases}$

Dividiendo $\begin{cases} a-b : a :: c-d : c \\ a-b : b :: c-d : d \end{cases}$

Convirtiendo $\begin{cases} a : a-b :: c : c-d \\ b : a-b :: d : c-d. \end{cases}$

ARTICULO III.

Theoremas Fundamentales ſobre las Proporciones Geometricas.

128 THEOREMA I. *Las Partes Semejantes ſon entre sí, como ſus Todos reſpectivos.*

Partes *Semejantes* ſon las que tienen una miſma denominacion reſpecto de ſus Todos, eſto es, que cada una es una *tercia*, una *quarta*, una *quinta*, *&c.* de ſus reſpectivos Todos.

Demonſt. Las Partes *Semejantes* eſtán contenidas *igual numero de veces* en ſus Todos, luego de la miſma ſuerte que un Todo contiene al otro Todo, la Parte Semejante de un Todo contendrá à la Parte Semejante del otro Todo. Aſſi ſiendo los Todos A, y B, y las Partes Semejantes *a*, *b*; tendrémos A : B :: *a* : *b*.

129 THEOREMA II. *Si hubieſſe quatro quantidades en proporcion* a : b :: c : d, *tambien ſerán Alternando*, a : c :: b : d.

Demonſt. Si los antecedentes *a*, *c* fueſſen *menores* que ſus conſiguientes *b*, *d*, los antecedentes ſe podrán conſiderar como *partes ſemejantes* de ſus todos los conſiguientes, y ſi los antecedentes fueſſen *mayores*, ſe podrán conſiderar como *todos*, y los conſiguientes

como ſus partes ſemejantes; pero las partes ſemejantes tienen entre sí la miſma razon, que ſus todos; luego ſi $a : b :: c : d$, ſerán alternando, $a : c :: b : d$.

130 THEOREMA III. *Si dos quantidades ſe multiplican por otra tercera, los Productos tendrán entre sí la miſma razon, que tenian dichas quantidades antes de multiplicarſe.*

Eſto es, ſi a, y b ſe multiplican por una tercera c, ſerá $a : b :: a \times c : b \times c$.

Demonſt. Por las Leyes de la Multiplicacion la unidad eſtá contenida en el Multiplicador, como el Multiplicando en el Producto, y aſſi ſerá

$$1 : c :: a : ac$$
$$1 : c :: b : bc;$$

luego (Axioma 1.) $a : ac :: b : bc$, y alternando, $a : b :: ac : bc$.

131 THEOREMA IV. *Si dos quantidades ſe dividen por otra tercera, las quantidades divididas, ò los Quocientes, tienen entre sí la miſma razon, que tenian antes de dividirſe.*

Eſto es, ſi a, y b ſe dividen por otra tercera c, ſerá $a : b :: \frac{a}{c} : \frac{b}{c}$.

Demonſt. Por las Leyes de la Diviſion el Dividendo contiene el Diviſor, como el Quotiente à la unidad; luego $a : c :: \frac{a}{c} : 1$, y $b : c :: \frac{b}{c} : 1$, alternando en entrambas Proporciones

nes

nes tendrémos $a : \frac{a}{c} :: c : 1$, $b : \frac{b}{c} :: c : 1$; luego (Axioma 1.) $a : \frac{a}{c} :: b : \frac{b}{c}$, y alternando, $a : b :: \frac{a}{c} : \frac{b}{c}$, eſto es, los Quocientes como los Dividendos.

132 THEOREMA V. *Si hai quatro quantidades en proporcion, aunque ſe dividan los conſiguientes, ò los antecedentes por una miſma quantidad, quedan no obſtante dichas quantidades en proporcion.*

Eſto es, ſi $a : b :: c : d$, tambien $a : \frac{b}{e} :: c : \frac{d}{e}$, y $\frac{a}{r} : b :: \frac{c}{r} : d$.

Demonſt. 1º. Si $a : b :: c : d$, tambien alternando, $a : c :: b : d$; pero (Theor. 4.) $b : d :: \frac{b}{e} : \frac{d}{e}$; luego (Axioma 1.) $a : c :: \frac{b}{e} : \frac{d}{e}$, y alternando, $a : \frac{b}{e} :: c : \frac{d}{e}$.

2º. Si $a : b :: c : d$, alternando, $a : c :: b : d$, pero $\frac{a}{r} : \frac{c}{r} :: a : c$ (Theor. 4.); luego (Axioma 1.) $\frac{a}{r} : \frac{c}{r} :: b : d$, y alternando, $\frac{a}{r} : b :: \frac{c}{r} : d$.

133 THEOREMA VI. *Si quatro quantidades eſtubieſſen en proporcion, quedarán tambien en proporcion, por mas que ſe multipliquen los antecedentes, ò los conſiguientes por una miſma quantidad.* Eſ-

Esto es, si $a : b :: c : d$, tambien $ae : b :: ce : d$, y $a : bx :: c : dx$.

Demonst. 1°. Si $a : b :: c : d$, alternando, $a : c :: b : d$; pero (Theor. 3.) $ae : ce :: a : c$, luego (Axioma 1.) $ae : ce :: b : d$, y alternando, $ae : b :: ce : d$.

2°. Si $a : b :: c : d$, alternando, $a : c :: b : d$; pero $b : d :: bx : dx$, luego (Axioma 1.) $a : c :: bx : dx$, y alternando, $a : bx :: c : dx$.

COR. Siendo $a : c :: ae : ce :: bx : dx :: \frac{a}{r} : \frac{c}{r} :: \frac{b}{e} : \frac{d}{e}$, será $ae : bx :: ce : dx$, $\frac{a}{r} : \frac{b}{e} :: \frac{c}{r} : \frac{d}{e}$, $ae : \frac{b}{e} :: ce : \frac{d}{e}$; y assi *si quatro quantidades están en proporcion, multipliquense, ò dividanse los antecedentes por una quantidad, y los consiguientes por otra, quedarán no obstante, assi multiplicados, como divididos, en proporcion.*

134 THEOREMA VII. *Si hubiesse quatro quantidades en proporcion* a : b :: c : d, *tambien Invirtiendo*, b : a :: d : c.

Demonst. Si $a : b :: c : d$, será $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, luego (Axioma 2.) $1 : \frac{a}{b} :: 1 : \frac{c}{d}$; por consiguiente multiplicando los terminos de la primera razon por b, y los de la segunda por d, será (Theor. 3.) $b : a :: d : c$.

135 THEOREMA VIII. *Si hubiesse muchas Razones semejantes, la Suma de todos los antecedentes*

cedentes es à la Suma de todos los conſiguientes, como qualquiera de los antecedentes à ſu reſpectivo conſiguiente.

Eſto es, ſi $a : b :: c : d :: e : f$,
ſerá $a + c + e : b + d + f :: a : b :: c : d :: e : f$.

Demonſt. Siendo todas las Razones dadas ſemejantes, ſi $a = \frac{1}{2}b$, tambien ſerá $c = \frac{1}{2}d$, $e = \frac{1}{2}f$, luego la ſuma de todos los antecedentes ſerá la mitad de la ſuma de todos los conſiguientes, y le ſerá en Razon *Subdupla*; pero en tal caſo tambien $a : b$ eſtá en Razon *ſubdupla*, luego dichas Razones ſon ſemejantes. Lo miſmo ſucederá en qualquier Razon eſté un antecedente à ſu conſiguiente.

136 THEOREMA IX. *Si hubieſſe quatro quantidades en proporcion, la Diferencia de los antecedentes ſerá à la Diferencia de los conſiguientes, como el un antecedente à ſu conſiguiente.*

Eſto es, ſi $a : b :: c : d$, ſerá $a - c : b - d :: a : b$.

Demonſt. Si $a : b :: c : d$, tambien permutando, $a : c :: b : d$. Demos, que $a > c$, y $b > d$, ſerá c la miſma parte de a, que d de b, y $a - c$ la miſma parte de a, que $b - d$ de b; pero los todos ſon como las partes ſemejantes, luego $a - c : b - d :: a : b$.

137 THEOREMA X. *Si hubieſſe quatro quantidades en proporcion, tambien* (Componiendo) *ſerá la Suma del antecedente, y conſiguiente de la una Razon à ſu antecedente, ò à ſu con-*

consiguiente, como la Suma del antecedente, y consiguiente de la otra Razon à su antecedente, ò à su consiguiente.

Esto es, si $a : b :: c : d$, tambien $a + b : a :: c + d : c$, y $a + b : b :: c + d : d$.

Demonst. Si $a : b :: c : d$, tambien alternando, $a : c :: b : d$, pero (Theor. 8.) $a + b : c + d :: a : c :: b : d$, luego alternando, $a + b : a :: c + d : c$, que es la Suma del antecedente, y consiguiente al antecedente, y $a + b : b :: c + d : d$, que es la misma Suma al consiguiente.

138 THEOREMA XI. *Si hubiesse dos, ò mas Proporciones semejantes, la Suma de todos los antecedentes de las primeras Razones será à la Suma de todos los consiguientes de estas primeras Razones, como la Suma de todos los antecedentes de las segundas Razones à la Suma de todos los consiguientes de las segundas Razones.*

Esto es, si $a : b :: c : d$
$e : f :: g : h$
$n : p :: q : r$

será $a + e + n : b + f + p :: c + g + q : d + h + r$.

Demonst. Siendo estas Proporciones *Semejantes*, como se supone, serán tambien las Razones, que las componen, semejantes; pero en Razones semejantes la Suma de los antecedentes es à la Suma de los consiguientes, como

como uno de los antecedentes à ſu conſiguiente; luego $a+e+n : b+f+p :: a : b$, y $c+g+q : d+h+r :: c : d$; pero $a : b :: c : d$, luego (Axioma 1.) $a+e+n : b+f+p :: c+g+q ; d+h+r$.

139 THEOREMA XII. *Si hubieſſe quatro quantidades en proporcion, tambien* (Dividiendo) *la Diferencia de los terminos de la primera Razon ſerá à ſu antecedente, ò conſiguiente, como la Diferencia de los terminos de la ſegunda Razon al ſuyo, y* (Convirtiendo) *el antecedente, ò conſiguiente de la primera Razon ſerá à la Diferencia del antecedente ſobre ſu conſiguiente, como el antecedente, ò conſiguiente de la ſegunda Razon à la Diferencia del antecedente ſobre ſu conſiguiente.*

Eſto es, ſi $a : b :: c : d$, ſerá dividiendo, $a-b : a :: c-d : c$, $a-b : b :: c-d : d$, y convirtiendo, $a : a-b :: c : c-d$, $b : a-b :: d : c-d$.

Demonſt. Si $a : b :: c : d$, ſerá alternando, $a : c :: b : d$; pero la diferencia de los antecedentes es à la diferencia de los conſiguientes, como el un antecedente à ſu conſiguiente, luego (Theor. 9.) $a-b : c-d :: a : c :: b : d$, y alternando, $a-b : a :: c-d : c$; y $a-b : b :: c-d : d$, que es la Proporcion *dividiendo*, è invirtiendo, ſerá $a : a-b :: c : c-d$, $b : a-b :: d : c-d$, que es la Proporcion *convirtiendo*.

140 THEOREMA XIII. *Si hubieſſe dos, ò*

mas

mas Proporciones qualeſquiera, los Productos de los terminos correſpondientes, eſto es, *del primero por el primero, del ſegundo por el ſegundo, &c. eſtarán tambien en proporcion.*

Eſto es, ſi $a : b :: c : d$

$e : f :: g : h$

Tambien $ae : bf :: cg : dh.$

Demonſt. Por la primera Proporcion, tenemos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, y por la ſegunda $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$, luego ſiendo los factores reſpectivamente iguales, ſerán tambien iguales los productos, y tendrémos $\frac{a}{b} \times \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \times \frac{g}{h}$, eſto es, $\frac{ae}{bf} = \frac{cg}{dh}$, luego (Axioma 2.) (Theor. 3.) $ae : bf :: cg : dh.$

De aquí es, que ſiendo quatro quantidades proporcionales, tambien lo ſerán ſus Quadrados, ſus Cubos, &c. por conſiguiente ſus Raices ſemejantes, ſegundas, terceras, &c. Porque poniendo una Proporcion dos veces, y multiplicando ſus terminos, tambien eſtarán en proporcion los productos, que ſon ſus Potencias.

Eſto es, ſi $a : b :: c : d$

$a : b :: c : d$

Tambien
$$\begin{cases} a^2 : b^2 :: c^2 : d^2 \\ a^3 : b^3 :: c^3 : d^3 \\ \sqrt[3]{a^3} : \sqrt[3]{b^3} :: \sqrt[3]{c^3} : \sqrt[3]{d^3}. \end{cases}$$

Por

Por consiguiente, si hai dos Proporciones, dividiendo los terminos de la una por los terminos respectivos de la otra, estarán los Quocientes en proporcion.

Esto es, si $\begin{cases} a^3 : b^3 :: c^3 : d^3 \\ a^2 : b^2 :: c^2 : d^2 \end{cases}$

Tambien $a : b :: c : d.$

ARTICULO IV.

De la Proporcion de los Extremos por la igualdad de las Razones intermedias.

141 PAra la inteligencia de esto es menester presuponer dos Séries de igual numero de terminos, como a, b, c, d en la una, e, f, g, h en la otra. El primer termino a en la una tiene alguna Razon al segundo b, y este (b) tambien alguna Razon à c, &c. De donde en estas dos Séries de terminos habrá en cada una *tres* Razones, esto es, $a : b$, $b : c$, $c : d$, y en la otra $e : f$, $f : g$, $g : h$. Si las tres Razones de una Série son iguales à las tres Razones de la otra, una à una, precindiendo del orden, que sea la primera à la primera, ò la primera à la segunda; el primer termino de una Série será al ultimo de la misma Série, como el primer termino de la otra, al ultimo de

de la ſuya; eſto es, los quatro extremos eſtarán en proporcion $a : d :: e : h$, y eſta Proporcion ſe inferirá *ex æqualitate Rationum*, de la igualdad de Razones intermedias de una Série con las de la otra.

Si eſtas tres Razones de una Série à mas de ſer iguales à las tres Razones de la otra, ſon *iguales por orden*, eſto es, la primera Razon de la una con la primera de la otra, la ſegunda con la ſegunda, &c. la Proporcion de los extremos ſe inferirá *ex æqualitate ordinata Rationum*, eſto es, *de la igualdad ordenada de Razones*, ò ſi ſe dice por abreviar unicamente *ex æquo*, *por la igualdad*, ſe entiende por la *igualdad ordenada*.

Si eſtas tres Razones de la una Série, aunque ſon iguales con las de la otra, pero no por el orden de primera con primera, ſino la primera de la una con la ſegunda, ò tercera de la otra; la Proporcion de los extremos ſe inferirá de la *igualdad de Razones*, pero no de la igualdad *ordenada*, porque no la hai, ſino de la *igualdad perturbada*, *ex æquo perturbatè*.

Eſto preſupueſto:

142 Theorema I. *Si hubieſſe dos Séries de igual numero de Razones iguales, y ordenadas, el primer termino de la una ſerá al ultimo de la miſma Série, como el primer termino de la otra al ultimo de la ſuya*, ex æquo ordinatè, *ò por igualdad de Razones ordenadas*.

Eſto

Esto es, si en estas dos Séries $\left\{\begin{matrix} a:b:c \\ d:e:f \end{matrix}\right\}$ fuesse $a:b::d:e$, y $b:c::e:f$, será $a:c::d:f$.

Demonst. Por ser $a:b::d:e$, será alternando, $a:d::b:e$; de la misma suerte, por ser $b:c::e:f$, será tambien alternando, $b:e::c:f$, luego (Axioma 1.) $a:d::c:f$, y alternando, $a:c::d:f$.

143 THEOREMA II. *Si hubiesse dos Séries de igual numero de Razones iguales, pero no por orden seguido, sino perturbado, tambien por esta igualdad perturbada el primer termino de una Série será al ultimo de la misma Série, como el primer termino de la otra al ultimo de la suya.*

Esto es, si en estas dos Séries $\left\{\begin{matrix} a:b:c \\ d:e:f \end{matrix}\right\}$ fuessen iguales entre sí las Razones $a:b$, y $e:f$, $b:c$, y $d:e$, que es decir la primera Razon de la una con la segunda de la otra, tambien será $a:c::d:f$.

Dem. Por ser $\left\{\begin{matrix} a:b::e:f \\ b:c::d:e \end{matrix}\right\}$

será (Theor. 13.) $ab:bc::de:fe$

luego (Theor. 4.) $a:c::d:f$.

Y assi si las Razones intermedias de dos Séries son iguales, esté, ò no esté ordenada esta igualdad, siempre los extremos están en proporcion.

Para

144 Para dar fin à eſta igualdad de Razones pondré aquí dos Definiciones, que expliquen dos frequentiſſimos modos de hablar en las Mathematicas; pero primero ſe ha de notar, que por quantidad *Conſtante* ſe entiende una quantidad, *que, ſe muden, ò no ſe muden las circunſtancias de algun caſo, ò las otras quantidades, con quienes ſe compara, ò junta, ſiempre queda la miſma.* Por quantidad *Variable* ſe entiende aquella, *que ſe aumenta, ò diſminuye ſegun las otras ſe aumentan, ò diſminuyen.* Eſto preſupueſto:

DEFINICION I. *Si hubieſſe dos quantidades de tal correlacion entre sí, que no ſe pueda aumentar la una, ſin que la otra ſe aumente con la miſma Proporcion, ni ſe pueda diſminuir en alguna Razon dada, ſin que la otra ſe diſminuya en la miſma Razon, entonces la una es directamente como la otra*, y ſe exprimen de eſta ſuerte $a = b$, en donde el ſigno = no ſignifica igualdad de una quantidad à otra, ſino igualdad de Razon con ſu *aumento*, ò *diminucion* reſpectiva.

Sean eſtas dos quantidades a, y b de tal naturaleza, que a no pueda llegar à ſer la quantidad c, ſin que b llegue à ſer la quantidad d, y haya la miſma Razon de a à c, que de b à d, entonces a es directamente como b, eſto es, con la miſma lei con que a aumenta, ò diſminuye, aumenta, ò diſminuye b, y la miſma

ma Razon, que tiene *a* à ſu aumento, ò diminucion, tiene *b* al ſuyo; de donde $a : c :: b : d$, y *a* à *b* eſtá en *Razon directa.*

145 DEFINICION II. *Si hubieſſe dos quantidades variables de tal correlacion entre sí, que no ſe pueda aumentar una en alguna Razon dada, ſin que la otra diſminuya en la miſma Razon; ò al contrario, no ſe pueda diſminuir, ſin que la otra por los miſmos grados ſe aumente, entonces la una es reciprocamente, ò en Razon inverſa de la otra*, y ſe pone aſſi $a = \frac{1}{b}$, ò la Razon de una à ſu aumento es como la Razon de otra à ſu diminucion.

Sea *a* de tal naturaleza, que no ſe pueda aumentar haſta ſer *c*, ſin que *b* diſminuya haſta ſer *d*, y quanto aumente la una, con la miſma Razon diſminuya la otra, en eſte caſo no ſe puede poner eſta Proporcion aſſi $a : c :: b : d$, porque eſto ſignifica Proporcion Directa; pues para reducir la Proporcion Inverſa à Directa ſe ha de tranſtornar una de las Razones, de eſta ſuerte $a : c :: d : b$; y pueſta aſſi eſta Proporcion, ſeguirá las leyes de la Proporcion Directa.

ARTI-

ARTICULO V.

De las Reglas de Proporcion Arithmetica.

146 PAra diſtinguir en las Proporciones la Arithmetica de la Geometrica, en la primera ſeparamos el antecedente del conſiguiente con ſolo un puntico (.), en la ſegunda con dos (:). Solo hablarémos en eſte Articulo, y en el ſiguiente, de la Proporcion, que conſte de dos Razones, eſto es, de *tres terminos*, ſi la Proporcion es *Continua*, y de *quatro*, ſi es *Diſcreta*; porque ſi conſta de mas Razones, ò es Progreſſion, pide otros principios.

147 THEOREMA I. *En toda Proporcion Arithmetica Diſcreta la Suma de los extremos es igual à la Suma de los medios.*

Eſto es, ſi $a.b :: c.d$, $3.6 :: 4.7$, tambien $a+d=b+c$, $3+7=6+4=10$.

Demonſt. Si $a.b :: c.d$, ſerán los Exponentes $a-b=c-d$. Siendo pues eſtas quantidades iguales, ſi ſe añade à entrambas otra quantidad $(b+d)$, quedarán $a+d=b+c$.

COROLLARIO. Como de quantidades iguales quitando partes iguales, las reſtas, ò diferencias ſon iguales, *ſi de la Suma de los extremos quito el un medio, la Diferencia ſerá el otro medio.*

Aſſi

Aſſi en la Proporcion numerica precedente $3+7-4=6$, $3+7-6=4$; y *ſi de la Suma de los medios quito uno de los extremos, la diferencia ſerá el otro extremo*; pues $6+4-3=7$, $6+4-7=3$.

De aquí es, que dados tres, qualeſquiera que ſean, de los quatro terminos, que forman la Proporcion Arithmetica, ſe encuentra el otro, ò bien de la Suma de los extremos quitando el un medio, ſi ſe buſca el otro; ò bien de la Suma de los medios quitando el un extremo, ſi ſe buſca el otro extremo.

O bien finalmente formando una Proporcion, poniendo cada termino de los dados en ſu lugar, y en lugar del termino que ſe buſca, un x que le ſignifique, deſpues igualando la Suma de los extremos à la Suma de los medios, y quitando de la tal ſuma el compañero de x, tendrémos el valor de x, que es el termino buſcado. Por exemplo tengo tres terminos de una Proporcion, el primero es 2, el ſegundo 5, el quarto 6, y buſco el *tercero*. Pongo pues $2.5::x.6$, $2+6=5+x$, $x=2+6-5=3$, pues el tercer termino, que buſcaba, ha de ſer 3, y aſſi ſerá $2.5::3.6$, y $2+6=5+3$.

148 THEOREMA II. *En qualquiera Proporcion Arithmetica continúa la Suma de los extremos es dupla del medio.*

Esto es, si $\div a . a+x . a+2x$, será $2a+2x = 2(a+x) = 2a+2x$ (*duplo* del segundo $a+x$), $\div 3 . 4 . 5$, será $3+5 = 4 \times 2 = 8$, *duplo* de 4.

Demonst. En la Proporcion Arithmetica continua el segundo termino es igual al primero a + *la diferencia* del primero al segundo x, y assi será $a+x$, el tercero es igual al segundo + la diferencia, y siendo el segundo $a+x$, el tercero será $a+2x$, luego la Suma del primero, y del tercero $a+a+2x$ será el primero dos veces tomado + dos diferencias, esto es, $2a+2x$; pero esta quantidad es dupla del segundo $a+x$, luego si $\div a . a+x . a+2x$, será $2a+2x = 2 \times (a+x)$.

De aquí es, *que para encontrar el Medio Proporcional Arithmetico, dados los extremos, sumense los extremos, y la mitad de esta Suma será el Medio Proporcional.*

Assi en las propuestas Proporciones Arithmeticas, $\frac{3+5}{2} = 4$ será el medio proporcional Arithmetico, $\frac{2a+2x}{2} = a+x$.

Para encontrar el *Tercero Proporcional*, dados los dos primeros, doblo el segundo, y quito de esta suma el primero, la resta será el Tercero Proporcional, $2 \times 4 - 3 = 5$, y si del doble del segundo quito el tercero, la resta será el *Primero*, $2 \times 4 - 5 = 3$.

ARTI-

ARTICULO VI.

De las Reglas de Proporcion Geometrica.

149 THEOREMA I. *En toda Proporcion Geometrica Diſcreta el producto de los extremos es igual al producto de los medios.*

Eſto es, ſi $a : b :: c : d$, ſerá $ad = bc$, tambien ſi $2 : 4 :: 8 : 16$, $2 \times 16 = 4 \times 8$.

Demonſt. Supueſto que $a : b :: c : d$, tambien $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, multiplicando entrambos quocientes, ò Exponentes por bd, ſerán iguales los productos, y aſſi $\frac{abd}{b} = \frac{cbd}{d}$; reduciendolo à menor expreſſion (borrando las quantidades comunes) ſerá $ad = cb$.

150 THEOREMA II. *Si quatro quantidades* a, b, c, d *ſon tales, que el producto de los extremos* (ad) *ſea igual al producto de los medios* (bc), *eſtán en proporcion, eſto es,* a : b :: c : d.

Demonſt. En tal caſo $ad = bc$, dividiendo entrambos productos por bd, tendrémos $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$, eſto es, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, luego (Axioma 2.) (Theor. 3.) $a : b :: c : d$.

De eſtos dos Theoremas ſe ſigue, *que para averiguar ſi quatro quantidades eſtán en proporcion, el medio ſeguro es ver, ſi el producto de los extremos es igual al producto de los medios*; ſi lo es, lo eſtán; ſino lo es, no lo eſtán.

151 THEOREMA III. *Si quatro quantidades* a, b, c, d (2, 6, 5, 15) *eſtán en proporcion, el producto de los medios dividido por uno de los extremos, dará por quociente el otro extremo, y el producto de los extremos dividido por uno de los medios, dará el otro medio por quociente.*

Eſto es, ſi $a : b :: c : d$, ſerá $\frac{ad}{b} = c$, $\frac{ad}{c} = b$, $\frac{bc}{a} = d$, $\frac{bc}{d} = a$, ſi $6 : 2 :: 15 : 5$, tambien $\frac{6 \times 5}{2} = 15$, $\frac{6 \times 5}{15} = 2$, $\frac{2 \times 15}{6} = 5$, $\frac{2 \times 15}{5} = 6$.

Demonſt. Si $a : b :: c : d$, ſerá $ad = bc$, dividiendo entrambas quantidades por a primer termino, b ſegundo, c tercero, d quarto, tendrémos $\frac{bc}{a} = d$, $\frac{ad}{b} = c$, $\frac{ad}{c} = b$, $\frac{bc}{d} = a$.

COROLLARIO I. Siendo el producto de los extremos $ad = bc$ producto de los medios, y formandoſe de ſus factores (por los Theoremas antecedentes) las Proporciones $a : b :: c : d$, $a : c :: b : d$, $b : a :: d : c$, $c : a :: d : b$, ſe ſigue (lo que es mui util para todo el diſcurſo de las Mathematicas) *que ſiempre que encontremos dos productos iguales, ſe podrá de ſus factores for-*

formar una Proporcion Geometrica, tomando por *Primer* termino qualquier factor de un producto, por *Segundo* qualquier factor de el otro, por *Tercero* el otro factor de eſte ſegundo, y por *Quarto* ſaldrá el otro factor del primer producto, pues de eſta ſuerte ſiempre el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Aſſi ſi $ab = cd$, ſerá $c : a :: b : d$, $d : a :: b : c$, &c.

COROLLARIO II. Como qualquier quantidad que ſea, ſe puede conſiderar como un producto de otras dos, que ſon ſus factores, *ſiempre que tengamos dos quantidades iguales, reduciendolas à ſus factores* (lo que ſe hace dividiendolas por el un factor, el quociente es el otro) *ſe formará de ellos una Proporcion.*

Por exemplo $12 = 12$, $\frac{12}{4} = 3$, $\frac{12}{6} = 2$, $3 \times 4 = 6 \times 2$, luego $2 : 3 :: 4 : 6$.

De eſte Theorema nace la famoſa *Regla de Tres*, en que dados tres terminos, qualeſquiera que ſean, ſe encuentra el otro, que con ellos forme una Proporcion. Aſſi dados los tres primeros, dividiendo el producto del ſegundo, y tercero por el primero, el quociente es el quarto, dividiendo el miſmo producto por el quarto, el quociente es el primero de la Proporcion. Dividiendo el producto del primero, y del quarto por el tercero, el quociente es el ſegundo, y dividiendo el miſmo pro-

producto por el ſegundo, el quociente es el tercero.

Tambien como en la Proporcion Arithmetica podemos poner x en el lugar del termino que buſcamos, haciendo deſpues el producto de los extremos igual al producto de los medios, y dividiendo el producto de los dos factores dados por el coeficiente de x, tendrémos el valor de x, que es el termino que buſcamos. Por exemplo dados *Primer* termino (4), *Segundo* (5), *Quarto* (6), buſco el *Tercero*, que forme la Proporcion. Será $4 : 5 :: x : 6$, $5x = 4 \times 6$, $x = \frac{4 \times 6}{5} = \frac{24}{5} = 4.8$; pues el termino que ſe buſcaba es 4.8, y la Proporcion ſerá $4 : 5 :: 4.8 : 6$, pues $4 \times 6 = 5 \times 4.8 = 24$.

152 THEOREMA IV. *En toda Proporcion Geometrica continua el producto de los extremos es igual al Quadrado, ò Segunda Potencia del medio.*

Eſto es, ſi $\dddot{:} a : b : c$, luego $ac = bb$.

Demonſt. Por ſer la Proporcion continua, ſerá $a : b :: b : c$; pero en toda Proporcion Geometrica el producto de los extremos es igual al producto de los medios, luego $ac = bb$.

Aſſimiſmo ſi $\dddot{:} 3 : 6 : 12$, ſerá $3 \times 12 = 6 \times 6$.

153 THEOREMA V. *En toda Proporcion Geometrica continua el Quadrado del ſegundo termino dividido por el primero, da el Tercero*

Pro-

Proporcional, y dividido por el Tercero da el Primero.

Esto es, si ∴ $a : b : c$, será $\frac{bb}{a} = c$, $\frac{bb}{c} = a$.

Demonst. Sea la Proporcion ∴ $a : b : c$. Por ser $ac = bb$, dividiendo entrambas quantidades por a primer termino, será $\frac{bb}{a} = \frac{ac}{a} = c$, que es el tercer termino.

Mas $ac = bb$, dividiendo entrambas quantidades por el tercer termino c, será $\frac{bb}{c} = \frac{ac}{c} = a$, que es el primero.

De aquí es, que si dados los dos primeros terminos de una Proporcion continua, busco el *Tercero Proporcional*, no hai mas que multiplicar el segundo por sí mismo, y dividir este Quadrado por el primero, el quociente será el tercero, y si el mismo Quadrado lo divido por el tercero, el quociente será el *Primero.*

154 PROBLEMA. *Dados dos terminos, encontrar un Medio Proporcional.*

Regla. *Multipliquense los dos terminos dados entre sí, y del producto saquese la Raiz quadrada, que será el Medio Proporcional.*

La Raiz quadrada de una quantidad se exprime por la misma quantidad precedida de esta señal √. Assi √a es la Raiz *quadrada* de a. De donde dados a, b, su medio proporcional será

será $\sqrt{ab}$; por lo tanto $\div\div a : \sqrt{ab} : b$, porque multiplicando los extremos, el producto será igual al medio multiplicado por sí mismo, como verémos.

CAPITULO VIII.

De la Regla de Tres.

155 LA *Regla de Tres, Regla de Proporcion, Regla de Oro* por su grande utilidad, no es otra cosa, que un *Methodo, por el qual, dados tres terminos de los quatro, que componen la Proporcion, se encuentra el otro*, que con ellos la complete. Pero como estos tres terminos dados pueden ser, ò bien los *dos medios*, y *un extremo* para encontrar el otro *extremo*, ò bien los *dos extremos*, y *un medio* para buscar el otro *medio*, y los tres terminos dados comunmente se ponen por los *tres primeros*, de ahí nace la division de la Regla de Tres en *Directa*, è *Inversa*. *Si se dan dos medios, y un extremo para encontrar el otro extremo, la Regla de Tres es Directa; si se dan dos extremos, y un medio, para buscar el otro medio, la Regla de Tres es Inversa.*

156 Mas, ò los terminos que se dan son

sim-

ſimples, ò *compueſtos*. Si ſon ſimples, eſto es, que ſolo ſe dan tres terminos conocidos, la Regla de Tres es *Simple*; ſi ſon compueſtos, ò lo que es lo miſmo, que ſe forman algunos por la multiplicacion de otros terminos dados (por darſe mas que tres, para encontrar otro) la Regla de Tres es *Compueſta*. Y como eſto puede ſuceder ya en la Regla de Tres Directa, ya en la Inverſa, de aquí es, que abſolutamente hai quatro eſpecies de *Reglas de Tres*, la *Directa Simple*, la *Directa Compueſta*, la *Inverſa Simple*, y la *Inverſa Compueſta*. Todas eſtas ſe llaman *Reglas de Tres*, porque aunque en las Compueſtas ſe den mas terminos que tres, pero finalmente todos han de venir à reducirſe à ſolos tres, como verémos.

Regla de Tres Directa Simple.

157 Entre los tres terminos que ſe dan, los dos forman una razon, por conſiguiente han de ſer de una miſma eſpecie, y los *primeros* de la Proporcion; el otro ha de ſer tal, que como antecedente forme con el termino que ſe buſca, otra razon igual à la primera, y aſſi ha de ſer el termino *tercero*. Por lo qual atendiendo, quales dos de los tres terminos dados forman una razon, à la qual ſe le buſca otra razon ſemejante, y pueſtos por *Primero*,

mero, y *Segundo*, como antecedente, y consiguiente, y el otro por *Tercero*, como antecedente de la segunda razon, se encuentra el *Quarto* termino buscado *multiplicando el segundo por el tercero, y dividiendo el producto por el primero*, como se ve en estos Exemplos.

EXEMPLO I.

30 Varas *de Lienzo cuestan* 50 Libras, 39 Varas *quanto costarán?*

Aquí se ve, que la misma razon que tienen 30 *Varas* à 39 *Varas* ha de tener el *precio* de 30 *Varas*, es à saber, 50 *Libras*, al *precio* de 39 *Varas*, que se busca. Y assi tendrémos la Proporcion $30 : 39 :: 50 : \frac{39 \times 50}{30} = 65$ *Libras*, precio que costarán 39 *Varas*, supuesto que 30 cuesten 50 *Libras*.

158 Pero como para el fin de la multiplicacion de los medios, lo mismo es; que esté el 39 por *segundo*, y 50 por *tercero*, qué al contrario, por esso los Arithmeticos no reparan en poner los terminos seguidamente como se van dando; por lo tanto la misma Proporcion se podrá poner assi

$$30^{v.} : 50^{l.} :: 39^{v.} : \frac{50 \times 39}{30} = 65^{l.}$$

EXEM-

EXEMPLO II.

6 Dias *hacen* 8640 Minutos, 9 Dias *quantos* Minutos *harán*?

Proporcion $6 : 8640 :: 9 : \frac{9 \times 8640}{6} = 12960^{Mi.}$

EXEMPLO III.

60 Peones *hacen* 382.23 Varas *de excavacion*, 300 Peones *quantas harán*?

$60 : 382.23 :: 300 : \frac{300 \times 382.23}{60} = 1911.15^{v.}$

159 Como ya los dos primeros terminos, ya el primero, y tercero de una Proporcion (quedando la misma) se pueden dividir por una misma quantidad; si, ò los dos primeros terminos, ò bien el primero, y tercero de una Proporcion dada se dividen por el primero, se reducirá la operacion à sola multiplicacion; pues en tal caso quedará por primer termino la unidad. Assi dividiendo los dos *primeros* terminos de la Proporcion del 2º. Exemplo por el primero (6), se reducirá à ser $1 : 1440 :: 9 : 9 \times 1440 = 12960'$.

Assimismo dividiendo los antecedentes del Exemplo 3º. por 60 (primer termino) será

$1 : 382.23 :: 5 : 1911.15^{v.}$

Tambien se puede reducir la Proporcion à sola

ſola multiplicacion dividiendo primero los antecedentes por una comun medida, y deſpues el ſegundo termino, y el quociente del primero, por eſte miſmo quociente.

Aſſi la Proporcion del Exemplo 1º..... } 30 : 39 :: 50
ſe reduce:
Dividiendo los antecedentes por 10..... } 3 : 39 :: 5 } :65l.
Dividiendo los dos primeros terminos por el quociente (3)..... } 1 : 13 :: 5

Regla de Tres Directa Compueſta.

160 La *Regla de Tres* ſe llama *Compueſta*, quando ſe dan mas terminos, que tres para encontrar otro que ſe buſca. Para lo qual es meneſter advertir, que entre los terminos que ſe dan hai *Cauſas, y Circunſtancias de tiempo, eſpacio, &c.* cuyo producto debe conſtituir ſolo *un termino*, y hai *Efectos*, que ſe hacen por tales cauſas pueſtas en tales circunſtancias, como ſe ve en los Exemplos ſiguientes.

EXEMPLO I.

20 Perſonas *en* 15 Dias *gaſtan* 45 Libras, 16 Perſonas *en* 8 Dias *quanto gaſtarán?*

La primera cauſa es 20 *Perſonas*, y la circunſtan-

cunſtancia, que le pertenece, ſon 15 *Dias*; ſu reſpectivo efecto ſon 45 *Libras*, que gaſtan. La otra cauſa es 16 *Perſonas*, y ſu circunſtancia es 8 *Dias*, ſu reſpectivo efecto es la *quantidad que gaſtarán*, que es lo que ſe buſca.

Eſto, que es *haber dos cauſas*, con ſus reſpectivas circunſtancias, y *dos efectos*, ſucede en toda Regla de Tres Compueſta. El *producto* de cada cauſa por ſus reſpectivas circunſtancias conſtituye un termino, cada efecto otro, y aſſi ſe reducirá la Regla de Tres Compueſta à ſolos tres terminos dados; porque en realidad para el caſo, lo miſmo es 20 *Perſonas* en 15 *Dias*, que 15 veces 20 *Perſonas* en un *Dia*, y 16 *Perſonas* en 8 *Dias*, que 8 veces 16 *Perſonas* en un *Dia*.

161 El termino pues que ſe buſca, ò ſerá *todo un efecto*, y entonces ſerá *todo* el 4º. termino, ò bien ſerá la *cauſa*, ò *una de ſus reſpectivas circunſtancias*, y aſſi ſerá *ſolo un factor* del 4º. termino, por lo qual dividiendo todo el quarto termino encontrado por el otro factor dado, el quociente ſerá el termino buſcado. Y aſſi en poner los terminos para la Proporcion vayanſe alternando las cauſas con los efectos.

En el Exemplo propueſto, en que ſe buſca un efecto, eſto es, *el numero de Libras*, que gaſtarán 16 *Perſonas* en 8 *Dias*, ſupueſto que 20 *Perſonas* en 15 *Dias* gaſten 45 *Libras*, ſe encon-

encontrará por la ſiguiente operacion:

1r. *termino*	2o. *termino*	3r. *termino*	4o. *termino*
20 Perſonas × 15 Dias	45 Libras	16 Perſonas × 8 Dias	*numero buſcado de* Libras

Prop. $20 \times 15 : 45 :: 16 \times 8 : \frac{45 \times 16 \times 8}{20 \times 15} = 19.2^{L.}$

que gaſtarán 16 Perſonas en 8 Dias.

Aquí ſe ve, que quando ſe buſca *todo* un efecto, el termino buſcado es el quarto termino entero.

EXEMPLO II.

20 Perſonas *en* 15 Dias *gaſtan* 45 Libras, *quantos* Dias *ſerán meneſter, para que* 16 Perſonas *gaſten* 23 Libras?

162 En eſte caſo ſe buſcan los *Dias*, que ſon la circunſtancia de una cauſa.

1r. *termino*	2o. *termino*	3r. *termino*	4o. *termino*
45 Libras	20 Perſonas × 15 Dias	23 Libras	16 Perſonas × *numero buſcado de* Dias

$45 : 20 \times 15 :: 23 : \frac{23 \times 20 \times 15}{45} = 153.333,$

Producto de las 16 *Perſonas* por el *numero buſcado* de *Dias*, que dividido por el factor dado 16 *Perſonas*, da 9.583 *Dias* por el termino buſcado.

Pero ſi dados los *Dias*, ſe buſcaſſe el *numero*

mero de Perſonas, que ſe hubieſſe meneſter para gaſtar las 23 Libras, dividiendo el *quarto* termino 153.333 por el numero dado de *Dias* 9.583, el quociente 16 ſería el numero buſcado de Perſonas.

Ahí ſe ve, que quando ſe buſca alguna cauſa, ò circunſtancia de la cauſa, el quarto termino ſiempre es un producto de la cauſa por ſus circunſtancias; por lo tanto dividido por uno de los factores, ò por el producto de los demás, ſi los factores dados ſon mas de dos, el quociente ſerá la *cauſa*, ò *circunſtancia* buſcada.

163 No ſolo el termino buſcado es *ſolo un factor* del quarto termino, quando ſe buſca alguna cauſa, ò circunſtancia de la cauſa, ſino tambien quando ſe buſca ſolo un *factor* del efecto, por ſer el efecto un producto de algunos terminos, ò quantidades que ſe dan, y de otras que ſe buſcan, como ſe ve en eſte

EXEMPLO III.

60 Hombres, *trabajando à* 8 Horas *por* Dia, *hacen en* 12 Dias *un Foſſo largo de* 21 Varas, 2 Pies, *ancho de* 4 Pies, *y hondo de* 8 Pies, *qual ſerá la Longitud del Foſſo ancho de* 2 Pies, *y hondo de* 5, *que* 50 Hombres *harán en* 15 Dias, *trabajando* 6 Horas *por* Dia?

Si ſe ſaben dicernir las cauſas, y las circunſtan-

cunſtancias de las cauſas, de los efectos, y circunſtancias de los efectos, no tiene mas dificultad eſte caſo, que los demás. El Foſſo es un producto de ſu reſpectivo *largo*, *ancho*, y *profundo*; reduciendolo pues todo à una miſma medida, que es à *Pies* (como ſe hace quando hai diferentes eſpecies de Medidas) ſerá la 1ª. cauſa, y ſus circunſtancias 60 *Hombres*, 8 *Horas*, 12 *Dias*, el primer efecto *un Foſſo largo de* 21 *Varas*, 2 *Pies* (65 *Pies*) *ancho* 4 *Pies*, *hondo* 8 *Pies*; la ſegunda cauſa, y ſus circunſtancias 50 *Hombres*, 15 *Dias*, 6 *Horas*; el ſegundo efecto, el *Foſſo de Longitud buſcada*, *ancho* 2 *Pies*, *hondo* 5 *Pies*, que pueſto todo en forma, ſerá

1r. *termino*	2o. *termino*	3r. *termino*	4o. *termino*
60 Hombres	largo 65 Pies	50 Hombres	*lõgitud buſcada*
x 8 Horas	x ancho 4 Pies	x 6 Horas	x ancho 2 Pies
x 12 Dias	x hondo 8 Pies	x 15 Dias	x hondo 5 Pies

Proporcion en ſus productos

$$5760 : 2080 :: 4500 : \frac{936000}{576} = 1625.$$

Dividiendo eſte quarto proporcional por el producto de los factores dados del quarto termino $2 \times 5 = 10$, da 162.5 Pies *Longitud buſcada* del Foſſo, que reducida à *Varas*, ſerá 54 Varas, y 6 Pulgadas.

Regla de Tres Inverſa Simple.

164 Diximos, que la *Regla de Tres* es *Inverſa*, quando de los tres terminos dados *los dos ſon extremos* de la Proporcion, y ſe buſca un *medio*; pero como comunmente los terminos ſe ponen ſeguidamente como ſe dan, por eſſo para encontrar el termino buſcado *ſe multiplica el primero por el ſegundo* (que en realidad es el *quarto* de la Proporcion) *y el producto dividido por el tercero da el termino que ſe buſca*, como ſe ve en eſte

EXEMPLO.

30 Hombres *emplean* 40 Dias *en hacer una Obra, en quanto tiempo la harán* 10 Hombres?

165 Como quantos menos ſean los *Hombres*, tanto mas tiempo habrán meneſter, los tiempos eſtarán en *Razon inverſa* de la de los *Hombres*; por conſiguiente la miſma razon tienen 30 *Hombres* à 10 *Hombres*, que el tiempo, que habrán meneſter los 10 *Hombres* al tiempo (40) que han habido meneſter los 30. Eſto es, 30 : 10 :: *tiempo buſcado de* 10 : *tiempo* (40) *dado de los* 30; ò bien tomando los terminos ſeguidamente como ſe dan, multiplicando el primer termino por el ſegundo, y dividiendo eſte producto por el tercero,

ſerá $\frac{30 \times 40}{10} = 120$ Dias, tiempo que han meneſter los 10 *Hombres*, ſupueſto que los 30 hayan meneſter 40 *Dias*.

Toda la dificultad eſtá en ſaber dicernir, quando para encontrar el termino que buſcamos, nos habrémos de valer de la Regla de Tres Directa, ò de la Inverſa. Eſto depende de la naturaleza de la coſa, de que ſe trata, reſpeto la que ſe buſca. *Si el Sugeto de que tratámos, quanto mayor es da mas, quanto menor dá menos*, nos habrémos de ſervir de la *Regla de Tres Directa*. *Quando el Sugeto de que ſe trata, quanto mayor es da menos, quanto menor da mas*, nos habrémos de ſervir de la *Regla Inverſa*.

Regla de Tres Inverſa Compueſta.

166 La diferencia que hai entre la Regla de Tres *Inverſa Simple*, y la *Inverſa Compueſta* conſiſte, en que en la Inverſa Simple los terminos ſon *ſimples*, ò no ſe componen por la multiplicacion de otros terminos dados, y en la Inverſa Compueſta algunos terminos ſon *compueſtos*, ò formados por la multiplicacion de otros terminos dados.

Por lo tanto dicerniendo en la Regla de Tres Inverſa Compueſta las circunſtancias de una cauſa de las circunſtancias de otra, y tal

vez

vez tambien las circunſtancias de los efectos, formando los terminos por la multiplicacion de la cauſa, ò del efecto por ſus reſpectivas circunſtancias, guardenſe las leyes dadas para la Regla de Tres Inverſa Simple, eſto es, que ſi ſe toman los terminos como comunmente ſe dan, multipliqueſe el primero por el ſegundo, y dividaſe el producto por el tercero, el quociente ſerá el termino buſcado, menos en el caſo, que ſolo ſe buſcaſſe uno de los factores del quarto termino, dado el otro; porque en tal caſo el quarto termino ſe habria de dividir por el factor dado, y el quociente ſería el que ſe buſca.

EXEMPLO.

Si 30 Hombres, *trabajando* 8 Horas *por* Dia, *hacen una Obra en* 40 Dias, *en quantos la harán* 10 Hombres, *trabajando à* 6 Horas *por* Dia?

167 Eſto ſe habrá de buſcar por la Regla *Inverſa Compueſta*, pues ſe dan mas terminos que tres, y el tiempo que ſe buſca tanto ſerá mayor, quantos menos *Hombres* ſean; por lo tanto ſe reduce eſte caſo à eſta Proporcion:

Como 30 Hombres, *trabajando à* 8 Horas,
Son à 10 Hombres, *trabajando à* 6 Horas:
Aſſi el tiempo buſcado, *que eſtos* 10 Hombres *han meneſter*
Al que los 30 Hombres *emplean* (40 Dias)

Aſſi formando los terminos por la multiplicacion de las cauſas por ſus reſpectivas circunſtancias, y tomandolos como ſe dan, ſerá $\frac{30 \times 8 \times 40}{10 \times 6} = 160$ *Dias*, que los 10 *Hombres* habrán meneſter para hacer la dicha Obra.

De lo dicho haſta aquí ſe ve, que quando ſe haya de uſar de la Regla de Tres, el principal cuidado ha de ſer en averiguar ſi pertenece lo que buſcamos à la Regla de Tres Directa, ò à la Inverſa; y ſi pertenece à la Regla de Tres Compueſta, en dicernir las circunſtancias de una, y otra cauſa, ò de los efectos, para formar los terminos de la Proporcion.

CAPITULO IX.

De algunas Aplicaciones de la Regla de Tres.

168 LA *Regla de Tres*, ò *de Proporcion* aplicada à diferentes materias, tiene diferentes nombres. Aplicada al Interés, que correſponde à algun Capital, ſe llama *Regla de Interés*; aplicada à la Compañia que hacen dos, ò mas perſonas en el Comercio, en orden à ſu Pérdida, ò Ganancia, ſe llama *Regla de Compañia*; aplicada à la mixtura de varias coſas de diferentes precios, peſos, &c. en orden

orden à un precio, ò peſo medio, ſe llama *Regla de Alligacion*; aplicada à algunas ſuposiciones falſas para inferir, ò encontrar lo verdadero, ſe llama *Regla de Falſa poſicion.*

REGLAS DE INTERES.

169 El *Interés*, que es *la Ganancia que correſponde à alguna quantidad por un tiempo dado*, ò es *Simple*, ò *Compueſto*, que tambien ſe llama *Interés de Interés.* El *Simple* es el que correſponde ſolo al Capital, el *Compueſto* el que pertenece à la *Suma* del Capital, è Interés ya vencido.

Regla de Interés Simple.

La Regla de *Interés Simple* por un Año, ſuponiendo à *5 por ciento*, ſe reduce à eſta Proporcion:

Como 100
A la Rata (5) *del Interés*:
Aſſi el Capital *dado*
Al Interés, *que le correſponde.*

Si ſe buſcaſſe el Interés Simple de muchos Años, multipliqueſe el Interés encontrado de un Año por el *numero de Años*, y el producto ſerá el Interés Simple de todos ellos.

170 Pero para reſolver brevemente algunas

nas cosas, que se suelen ofrecer en el Interés Simple, sea

A = à la Quantidad prestada à Interés
R = al Interés, que corresponde al Año à 100l.
T = à los Meses, Semanas, ò Dias del Año
N = à los Meses, &c. por quienes A se presta
S = à la Suma de Capital, è Interés.

Por lo que hemos dicho arriba tendrémos. $100 : R :: A : \frac{AR}{100}$ por el Interés, que en *un Año* corresponde à la quantidad A, que se ha prestado. Mas $T : N :: \frac{AR}{100} : \frac{ARN}{100T}$ por el Interés, que la quantidad A da por el *tiempo por el qual se ha prestado*, à quien añadiendo el Capital A, tendrémos $A + \frac{ARN}{100T} = S$, Suma de Capital, è Interés por el tiempo dado; de donde (por las Reglas que darémos sobre las Equaciones) resultan las siguientes Formulas.

$$S = A + \frac{ARN}{100T} \qquad R = \frac{100T \times (S - A)}{AN}$$

$$A = \frac{100ST}{100T + NR} \qquad N = \frac{100T \times (S - A)}{AR}$$

Estas Formulas exprimen el valor de las quatro cosas proporcionales, que se suelen buſ-

buſcar en el Interés Simple, eſto es, la *quantidad* (A) que ſe preſta; *à quanto por ciento* (R); los *Meſes*, *Semanas*, ò *Dias* (N), por los quales la quantidad ſe ha preſtado; y finalmente la *Suma* (S) *de Capital*, è *Interés*, que correſponde por el tiempo dado. Dadas *tres* qualeſquiera de eſtas coſas, reſulta el valor de la otra, ſubſtituyendolas en la Formula, que exprime el valor de la coſa que buſcamos, como ſe verá en los ſiguientes Problemas.

171 PROBLEMA I. *Encontrar la Suma de Capital, è Interés Simple de* 550 libras *preſtadas por* 7 *Meſes à* 4 *por ciento al Año.*

Tomando la Formula $S = A + \frac{ARN}{100T}$, que exprime el valor de la coſa que ſe buſca, es à ſaber, la *Suma de Capital, è Interés* (S) ſubſtituyendo las tres coſas dadas en las expreſſiones univerſales,

ſerá $\begin{cases} A = 550 \\ R = 4 \\ T = 12 \\ N = 7 \end{cases}$

por conſiguiente

$$S = A + \frac{ARN}{100T} = 550 + \frac{550 \times 4 \times 7}{100 \times 12} = 562.833^{l.}$$

Suma de Capital, è Interés que ſe buſca, de quien quitando el Capital 550, reſta 12.833l. por el Interés limpio.

PRO-

172 PROBLEMA II. *Encontrar qual ſea la quantidad, que preſtada à Interés Simple à razon de 5 por ciento al Año, ella junto con ſu Interés en 9 Meſes ſuba à hacer* 600 libras.

Como ſe buſca la *quantidad* que ſe preſta, ò ſe ha de preſtar à Interés, tomeſe ſu Formula $A = \frac{100ST}{100T + NR}$, en la qual ſubſtituyendo el valor de las tres quantidades dadas, ſerá

$$S = 600,\ T = 12,\ N = 9,\ R = 5,$$

por conſiguiente

$$A = \frac{100ST}{100T + NR} = \frac{100 \times 600 \times 12}{100 \times 12 + 9 \times 5} = 578\tfrac{26}{83} l.$$

Quantidad, que para el fin que ſe pretende ſe ha de preſtar à 5 por *ciento*.

173 PROBLEMA III. *Quanto ſe les ha de cargar de Interés à* 300 libras, *para que en* 15 *Meſes, ellas con ſu Interés formen un fondo de* 330 libras.

Buſcando el *Interés* correſpondiente à las tres condiciones dadas, tomeſe ſu Formula $R = \frac{100T \times (S - A)}{AN}$, en la qual ſubſtituyendo las tres coſas dadas, ſerá

$$S = 330,\ N = 15,\ A = 300,\ T = 12,$$

por conſiguiente

$$R = \frac{100T \times (S - A)}{AN} = \frac{100 \times 12 \times \overline{330 - 300}}{300 \times 15} = 8.$$

Pues el Interés que ſe ha de cargar à la quantidad que ſe preſta, es 8 por *ciento*.

PRO-

174 PROBLEMA IV. *En quantos Dias* 365 libras *à* 4 *por ciento, harán con ſu Interés un Fondo, ò Suma de* 400 libras?

Buſcando los *Dias* proporcionados, que deben reſultar de las condiciones del Problema, tomeſe ſu Formula $N = \frac{100T \times (S-A)}{AR}$, en la qual ſubſtituyendo los tres valores dados, ſerá

$$S = 400, A = 365, R = 4, T = 365,$$

(reduciendo el tiempo todo à una eſpecie) por conſiguiente

$$N = \frac{100T \times (S-A)}{AR} = \frac{100 \times 365 \times (400-365)}{365 \times 4}$$

$= 875$ *Dias*, tiempo que ſe buſcaba.

175 PROBLEMA V. *Encontrar el Interés, que correſponde por Dia à* 1 libra, *contando à* 5 *por ciento al Año.*

La Formula, ò Expreſſion univerſal del *Interés* por un tiempo dado, vimos que era $\frac{ARN}{100T}$, en la qual, por las condiciones del Problema, ſerá

$$A = 1, R = 5, N = 1, T = 365,$$

por conſiguiente

$$\frac{ARN}{100T} = \frac{1 \times 5 \times 1}{100 \times 365} = \frac{1}{100 \times 73} = 0.000136981.$$

Interés que correſponde por *Dia* à 1 *libra*, à razon de 5 por *ciento* al Año.

Regla

Regla de Interés Compueſto.

176 El *Interés Compueſto* ſucede, quando una Deuda, ò un Capital ha paſſado muchos Años ſin pagarſe, ò ſin ſacarſe el Interés Simple que le correſponde, *aumentando de eſta ſuerte el Interés vencido el Fondo, ò el Capital.* Encontrado pues para el primer Año, como arriba, el Interés Simple, que por eſſe primer Año le correſponde al Capital pueſto, para encontrar el Interés, que en el ſegundo Año le correſponde, tomeſe por nuevo Capital la *Suma del Capital primero, y del Interés del Año precedente*, y buſqueſe à eſta Suma, que Interés le correſponde, y aſſi de los Años ſiguientes; pero eſte methodo es largo, por lo tanto pondrémos otro mas expedito, examinando quanto ſe va aumentando 1 *l.* con eſte *Interés Compueſto.*

177 Para ſaber pues à lo que llega 1 *libra*, con ſu Interés al fin del *primer Año*, contando à 5 por *ciento*, por exemplo, valiendonos de la dicha Regla, tenemos eſta Proporcion:

100 : 105 :: 1 : 1.05, que hago = R.

Al fin del *ſegundo Año* 1 *l.* vendrá à ſer R^2, porque $1 : R :: R : R^2$, al fin del *tercer Año*, ſerá R^3, porque $1 : R :: R^2 : R^3$, al fin del *quarto Año* ſerá R^4, al fin del *quinto* ſerá R^5 &c. finalmente al fin de Años *n* ſerá R^n, *levantan-*

vantando lo que es al fin del primer Año à la Potencia, que indica el numero de Años; luego ſiendo C el Capital que ſe pone *à Interés Compueſto*, tendrémos $CR^n = S$, *Suma de Capital, è Interés Compueſto* en *n* Años, de donde ſalen eſtas quatro Formulas, que exprimen el valor de las quatro coſas, que en el *Interés Compueſto*, como en el Interés Simple, ſuelen ocurrir, y à que ſolo ſe ha de atender.

$$S = CR^n \qquad R^n = \frac{S}{C}$$

$$C = \frac{S}{R^n} \qquad R = \sqrt[n]{\frac{S}{C}}$$

Mas 1 : R :: 100 : 100 R, que es *quanto llegan à ſer* 100 en un Año, por conſiguiente eſte *Exceſſo* es el *quanto por ciento* por Año correſponde.

178 PROBLEMA. *Qual es el Total, que deſpues de* 12 *Años reſulta de* 15 l. 17 ſ. 6 d. *pueſtas à Interés Compueſto de* 6 *por ciento*?

Como ſe buſca el Total S, tomeſe la Formula $S = CR^n$, que exprime ſu valor, en la qual por las condiciones del Problema, ſerá $R = 1.06$, $C = 15.875$ *l.* $n = 12$, y por conſiguiente $S = CR^n = 15.875 \times (1.06)^{12} = 31$ *l.* 18 *ſ.* 10.4 *d.*

Eſtas operaciones por Logarithmos ſe hacen con grandiſſima brevedad, por levantarſe por ſu medio con grande expedicion las quantidades à ſus Potencias, como verémos.

De

179 De la misma suerte que del Interés Compuesto se puede discurrir de la *Rebaxa* de 5 *por ciento* al Año, por exemplo; examinando lo que rebaxa 1 *l.* en un Año, supuesto que 100 rebaxe 5, para lo qual tenemos esta Proporcion:

100 : 95 :: 1 : 0.95, que hago = R,

al fin del segundo Año será 1 *l.* = R^2, al fin del tercero será R^3, finalmente al fin de Años *n*, será 1 *l.* = R^n; con que siendo C el Capital, que se debe rebaxar en *n* Años, será $CR^n = S$, *Suma* à que viene à parar el Capital al fin de Años *n* de rebaxa, de donde tendrémos

$$C = \frac{S}{R^n} \qquad R^n = \frac{S}{C}$$

$$S = CR^n \qquad R = \sqrt[n]{\frac{S}{C}}$$

las mismas Formulas, que para el Interés Compuesto; tambien 1 : R :: 100 : 100 x R, cuyo *defecto* hasta 100, será el *quanto por ciento* de rebaxa al Año.

REGLAS DE COMPAÑIA.

180 La *Regla de Compañia* sirve, quando se juntan los Capitales de muchos, y despues de algun tiempo se le corresponde à cada uno con la Ganancia, ò Pérdida segun su Fondo, ò Capital. La Regla de Compañia se llama

sin

ſin Tiempo, quando el tiempo por el qual ſe ponen los Capitales es *igual* para todos los particulares: ſe llama *con Tiempo*, quando los tiempos de cada uno ſon *diferentes*; el uno por exemplo pone en la Compañia para 8 Meſes, el otro para 3, &c.

Regla de Compañia ſin Tiempo.

La Regla de Compañia *ſin Tiempo* ſe funda en eſta Proporcion:

Como la Suma *de todos los* Capitales
Es à toda la Ganancia, *ò* Pérdida:
Aſſi el Capital *de cada Particular*
Es à la Ganancia, *ò* Pérdida *particular.*

De ahí ſe ve, que para cada Capital particular ſe habrá de formar nueva Regla de Tres, pero los dos terminos primeros ſiempre ſon los miſmos, y el tercero es el particular Capital.

EXEMPLO.

Quatro Mercaderes A, B, C, D *forman un Fondo de* 421 l. 8 ſ. 6 d. *de manera que*

A	pone	154 l.	13 ſ.	4 d.	=	154.6666 l. &c.
B		110	18	6	=	110.925
C		95	0	8	=	95.0333 &c.
D		60	16	0	=	60.8
Suma		421	8	6	=	421.425

Sea

Sea la Ganancia 88 *l.* 17 *s.* 10 *d.* = 88.8916 &c. *l.* Tendrémos las siguientes Proporciones:

Suma de Capitales.	*Ganancia total.*	*Capital particular.*	*Ganancia.*	
		l.	*l.*	
l.	*l.*			
421.425	88.89 ::	154.666	32.62	de A
		110.925	23.39	de B
		95.033	20.04	de C
		60.8	12.82	de D

181 Atendiendo à la Proporcion fundamental ſobredicha, podrémos ahorrar tiempo en ſemejantes Compañias, teniendo Formulas generales; para lo que

ſean { A, B, C, D &c. Mercantes en Compañia
a, b, c, d &c. Fondos particulares,

ſerá { $a+b+c+d$ &c. = S, total de los Fondos
G = Ganancia total.

Formando la Proporcion,

tendrémos {
$\frac{Ga}{S}$ = *Ganancia de* A
$\frac{Gb}{S}$ = *Ganancia de* B
$\frac{Gc}{S}$ = *Ganancia de* C
$\frac{Gd}{S}$ = *Ganancia de* D

Pero ſi la razon de S à G ſe reduce à terminos mas breves, dividiendolos por alguna co-

comun medida, ò bien ſe buſca algun termino, que tenga à la unidad la miſma razon, que G à S, ſe podrá abreviar tanto la operacion en ſemejantes Compañias, que por una leve multiplicacion del Fondo particular por una quantidad conſtante, ò que en todas partidas ſerá la miſma, ſe encontrará la Ganancia, ò Pérdida, que à cada Particular le pertenece.

Aſſi, en el Exemplo precedente, ſiendo 421.425 (S) : 88.8916 (G) :: 1 : 0.21093, ſubſtituyendo por la razon S : G ſu igual, ſerá

$$0.2109 \times \begin{Bmatrix} l. & & l. \\ 154.666 & = & 32.6238 \\ 110.925 & = & 23.3974 \\ 95.033 & = & 20.0453 \\ 60.8 & = & 12.8245 \end{Bmatrix} \text{Ganancia de} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix}$$

Regla de Compañia con Tiempo.

182 La *Regla de Compañia con Tiempo* viene à reduciſe à Regla de Tres Compueſta, para cuya inteligencia, pongo un

EXEMPLO.

Tres Mercaderes A, B, C *entran en Compañia*; A *pone* 65.5 l. *para* 8 Meſes, 2 Semanas, y 3 Dias; B *pone* 78.66 l. *para* 1 Año, 3 Semanas, y 1 Dia; C *pone* 84 l. *para* 6 Meſes, y 6 Dias, *la Ganancia total es* 140.016 l.

Re-

Reduciendo todos los Tiempos à una misma especie, esto es, à *Meses*, y sus decimales, tomese la siguiente

Regla. *Multipliquese el Fondo de cada Particular por su respectivo Tiempo, y despues formese esta Proporcion:*

Como la Suma *de todos estos Productos*
Es à la Ganancia total:
Assi cada particular Producto
A su Ganancia particular *por su Tiempo dado.*

Assi, en el Exemplo propuesto, será

		l.		*Meses.*		*Productos.*
Fondo de	A	65.5	×	8.566	=	561.1123
	B	78.66	×	12.733	=	1001.6013
	C	84.	×	6.2	=	520.8
				Suma de Productos	=	2083.5136
				Total Ganancia	=	140.016 *l.*

Haciendo pues la Proporcion, tendrémos

Suma de los Productos.	*Ganancia total.*		*Producto particular.*	*Ganancia.*	
			l.	*l.*	
l.	*l.*		561.11	37.70	A
2083.51	140.01	::	1001.60	67.30	B
			520.8	34.99	C

Pero si los dos primeros terminos se reduxessen à menor expression, como en la *Compañia sin Tiempo*, la operacion sería mas breve, pues se reduciria à sola multiplicacion.

Obran-

183 Obrando de un modo ſemejante, que en la Compañia ſin Tiempo, para tener Formulas generales,

$$\text{ſean}\begin{cases} A, B, C, D \text{ &c. Mercantes en Compañia} \\ a, b, c, d \text{ &c. Particulares Fondos} \\ m, n, r, s \text{ &c. Reſpectivos Tiempos,} \end{cases}$$

$$\text{ſerá}\begin{cases} ma + nb + rc + sd \text{ &c.} = S \left\{ \begin{array}{l} \text{Suma de los} \\ \text{Productos de} \\ \text{Particulares} \\ \text{Fódo, y Tiépo} \end{array} \right. \\ G = \text{Ganancia total,} \end{cases}$$

ſiendo $S : G :: 1 : \frac{G}{S}$,

$$\text{tendrémos}\begin{cases} \frac{G}{S} \times am = \textit{Ganancia de } A \\ \frac{G}{S} \times bn = \textit{Ganancia de } B \\ \frac{G}{S} \times cr = \textit{Ganancia de } C \\ \frac{G}{S} \times ds = \textit{Ganancia de } D \end{cases}$$

Y aſſi en Compañias Reales, y Publicas, en las quales ya los Fondos, ya los Tiempos reſpectivos ſon diferentes, ſi en la Reparticion general ſe calcula por las Reglas de Compañia con Tiempo, ſe podrá tomar una Formula de eſtas, en la qual dando à S, G, *a*, *m*, &c. ſu valor particular, ſe encontrará la Ganancia, que à cada uno le pertenece por ſu reſpectivo Fondo, y Tiempo.

REGLAS DE FALSA POSICION.

184 Aunque el uſo, y exercicio de eſta Regla ſea ya raro en las Mathematicas, porque ſu utilidad ſe logra mas facilmente por la Algebra; no obſtante, para que no venga de nuevo, ſi acaſo tal vez ſe encuentra ſu uſo, la pondré aquí. Eſta Regla ſirve, *quando dado un Numero*, ò un *efecto ſe buſca ſu parte determinada, ò de determinadas circunſtancias, ò la quantidad de la cauſa, que lo produce, valiendonos para encontrarlo de otro numero, ò de otra quantidad, que no es la que buſcamos*, y porque nos valemos de *una parte, que no es la tal, cómo ſi lo fueſſe* (lo que es falſo) por eſſo ſe llama la Regla de *Falſa Poſicion*, ò *Falſa Suposicion*. Eſta Regla es *ſimple* ſi ſolo nos ſervimos de una ſuposicion falſa, ſi de dos, es *doble*.

Regla de Falſa Poſicion Simple.

La Regla de Falſa Poſicion *Simple* ſe funda en eſta Proporcion:

Como el Total *que reſulta del* numero falſo, *que tomamos con las miſmas circunſtancias dadas*
Es al verdadero Total:
Aſſi la Parte falſamente ſupueſta
Es à la Parte verdadera, *que buſcamos.*

La

La practica, y ſubſtancia de eſta Regla ſe ve en el ſiguiente

185 PROBLEMA. *Encontrar una parte de* 100 *tal, que la ſuma de ſu doble, y de ſu mitad ſea* 100.

Las circunſtancias dadas de la parte que ſe buſca ſon, que la *ſuma de ſu duplo, y de ſu mitad ſea* 100. Tomeſe pues con las miſmas circunſtancias dadas qualquier numero que ſe quiera, inferior à 100, y veaſe qual ſea ſu reſultado. Por exemplo, tomeſe 30 por la parte buſcada, ſu *duplo* ſerá 60, ſu *mitad* 15, la *ſuma de ſu duplo, y de ſu mitad* ſerá $60 + 15 = 75$. De donde ſe ve, que el numero que ſe buſca no es 30; porque el reſultado de 30, tomado con tales circunſtancias, es 75, y el del numero que ſe buſca ha de ſer 100; pero atendiendo que el numero buſcado es la miſma parte de 100, que 30 es de 75, ſiendo los todos como las partes ſemejantes, la miſma razon tendrá el numero falſo (75) al numero dado (100), que la parte falſamente ſupueſta (30) tiene à la parte buſcada. Aſſi ſerá la miſma Proporcion de arriba

$$75 : 100 :: 30 : \frac{30 \times 100}{75} = 40.$$

Pues la parte de 100, que tenga las circunſtancias dadas es 40, y ſe ve, porque

$$2 \times 40 + \frac{40}{2} = 100.$$

Regla de Falſa Poſicion Doble.

186 En la Regla de *Falſa Supoſicion Doble* ſe toman dos numeros, los que queramos, como en la Regla Simple uno, y haciendo con ellos las miſmas operaciones, que en la Regla Simple, ſiendo las tales dos ſupoſiciones falſas, deben por conſiguiente dar dos reſultados, los quales entrambos ſe deben diferenciar del numero, cuya parte buſcamos. Eſtas diferencias, que llamamos *Errores*, ſon *ſemejantes*, quando entrambos reſultados exceden, ò entrambos ſon excedidos por el numero dado; eſtos Errores ſon *deſemejantes*, quando el un reſultado excede, y el otro es excedido por el numero dado. Cada uno de los Errores ſe pone al lado de ſu ſupoſicion con el ſigno + ſi es *en mas*, con el ſigno — ſi es *en menos*.

Eſto preſupueſto, hagaſe eſta Proporcion:

Como la Diferencia de los Errores (ſi ſon ſemejantes) *ò bien, como* ſu Suma (ſi ſon deſemejantes)
Es à la Diferencia de los numeros ſupueſtos:
Aſſi uno *de los* Errores (qualquiera que ſea)
Es à un quarto proporcional,

el qual *añadido* à la reſpectiva ſupoſicion, ſi el Error que ſe ha tomado por *tercer termino* es

es *en menos*, ò *quitado* ſi es *en mas*, ſerá el numero que buſcamos.

187 Buſqueſe, por exemplo, la miſma parte de 100, y con las miſmas circunſtancias, que en la Regla Simple. Suponiendo 30, ſu reſultado es 75, que ſe diferencia de 100 en 25. Suponiendo 38, el reſultado es 95, que ſe diferencia de 100 en 5, y por ſer entrambos Errores *en menos*, ſe ponen con el ſigno —

	Numeros ſupueſtos.	*Errores.*
	30,	— 25
	38,	— 5
Diferencias	8	20

Siendo entrambos Errores *ſemejantes*, tomeſe ſu Diferencia para la Proporcion, que

ſerá $20 : 8 :: 25 : \frac{25 \times 8}{20} = 10$

El qual quarto proporcional *añadido* al reſpectivo numero ſupueſto 30 del tercer termino de la Proporcion, por ſer Error *en menos*, dará por verdadero numero buſcado $30 + 10 = 40$, como arriba.

Si à mas de ſuponer por una parte 30, cuyo reſultado es 75, ſupuſieſſemos por otra parte 44, con las miſmas circunſtancias, ſu reſultado ſería $2 \times 44 + \frac{44}{2} = 110$, que exce-

de

de à 100 en 10, pues tampoco 44 es el numero que ſe buſca, y por ſer 10 Error *en mas* ſe habrá de poner con el ſigno +, y aſſi tendrémos

Numeros ſupueſtos.	*Errores.*
30,	— 25
44,	+ 10
Diferencia 14	35 *Suma*

Por ſer Errores *deſemejantes*, ſe habrá de tomar por primer termino de la Proporcion la Suma de los Errores, eſto es, 35, y ſerá $35 : 14 :: 10 : \frac{10 \times 14}{35} = 4$

Pero porque el Error, que ſe ha tomado por tercer termino, es *en mas*, ſe ha de quitar eſte quarto proporcional de ſu reſpectivo ſupueſto 44, y aſſi el verdadero numero buſcado ſerá $44 - 4 = 40$, como arriba.

188 Se puede ahorrar tiempo en los caſos particulares, teniendo alguna Formula, cuyo valor nos dé el Numero, ò Parte que buſcamos, por lo qual ſea

A = Numero, ò Quantidad que ſe buſca
B = Primero, C = Segundo } Numero Supueſto
D = Primero, E = Segundo } Error

Si

Si entrambos Errores ſon *ſemejantes*, ò bien *en mas*, ò bien *en menos*, tendrémos por lo que hemos dicho haſta aquí $\frac{DC-EB}{D-E}=A$, Numero que ſe buſca.

Pero ſi los Errores ſon *deſemejantes*, uno por *mas*, otro por *menos*, ſerá $\frac{EB+DC}{E+D}=A$, Numero, ò parte que ſe buſca. Subſtituyendo pues en eſtas Formulas ſus valores reſpectivos, tendrémos el numero buſcado.

REGLAS DE ALLIGACION.

189 Quando ſe han de mezclar Simples de diferentes eſpecies, el *Methodo de proporcionarlos*, como queramos, es lo que llamamos *Regla de Alligacion*, utiliſſima para muchos Artifices. Pero porque, ò buſcamos la *propriedad Media*, ò del *Mixto* que reſulta, dadas las *propriedades, y cantidades de los Simples*, ò buſcamos las *cantidades, y propriedades* de los Simples, *dada la propriedad, y cantidad* del Mixto, de ahí nacen dos ramos de la Regla de Alligacion, es à ſaber, *Alligacion Media*, y *Alligacion Alternada*.

Alligacion Media.

190 Regla de *Alligacion Media* es aquella,

lla, por la qual, dadas las *cantidades* de los *Ingredientes*, y ſus *propriedades* de peſo, precio, &c. ſe buſca la *propriedad* de peſo, precio, &c. de una cantidad del Mixto, y ſe funda en eſta Proporcion:

Como la Suma *de todas las Cantidades* de los Ingredientes
A la Suma *de las propriedades de peſo, precio, &c.* de todos ellos:
Aſſi la Cantidad *particular* del Mixto
A la propriedad *de peſo, precio, &c.* de la tal Cantidad.

EXEMPLO I.

Un Platero mezcla 15 Onzas *de Oro, que vale à* 7 l. *la* Onza, *con* 6 *de Plata, que vale à* 1.5 l. *y* 8 *de Cobre, que ſe vende à* 3 s. = 0.15 l. *quanto valdrá la* Onza *de eſte Mixto?*

La operacion ſe prepara de eſta ſuerte:

	Onzas.	*Precios.*	*Productos.*
Oro	15 x 7.	*l.* =	105
Plata	6 x 1.5	=	9
Cobre	8 x 0.15	=	1.2
Suma	29.	*Suma*	115.2 *de precios.*

Proporcion $29 : 115.2 :: 1 : \frac{115.2}{29} = 3\,l.\ 19\,s.\ 5\,d.$ la *Onza* del Mixto. Pues el producto 29 x 3 *l.* 19 *s.* 5.376 *d.* = 115.2 *l.* precio del Mixto.

EXEM-

EXEMPLO II.

Un Artifice mezcla 80 Pulgadas cubicas *de Cobre de* $5\frac{1}{4}$ Onzas *por* Pulgada *con* 20 Pulgadas *de Eſtaño de* $4\frac{1}{4}$ Onzas *cada una, quanto peſará cada* Pulgada *de eſte Mixto*?

Operacion:

	Pulgadas.	*Onzas.*	*Productos.*
Cobre	80	× 5.25 =	420
Eſtaño	20	× 4.25 =	85
Suma	100.	*Suma*	505 *Onzas.*

Proporcion 100 : 505 :: 1 : $\frac{505}{100}$ = 5.05 *Onzas* cada Pulgada del Mixto.

Pero fundados en la Proporcion fundamental dada para reducir eſta Alligacion Media à breves Formulas, ſean

A, B, C, D &c. Simples que ſe deben mezclar.
a, *b*, *c*, *d* &c. Propriedades particulares
A + B + C + D &c. = S, Suma de los Simples
a + *b* + *c* + *d* &c. = R, Suma de Propriedades

Tendrémos

$$S : R :: \left\{\begin{array}{l} 1 : \frac{R}{S} \\ 2 : \frac{2R}{S} \\ 3 : \frac{3R}{S} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \text{Propriedad} \\ \text{Media de} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} 1\ \textit{Parte} \\ 2\ \textit{Partes} \\ 3\ \textit{Partes} \end{array}\right.$$

Alli-

Alligacion Alternada.

191 La Regla de *Alligacion Alternada* (por alternarſe los terminos) es un Methodo para encontrar la *cantidad* de los Ingredientes, ò Simples, que ſe encuentran en el Mixto, dadas la *propriedad Media* de peſo, precio, &c. ò del Mixto, y las *propriedades particulares* de los Simples. Acerca lo qual ſe pueden ofrecer tres caſos.

1º. Dadas las *particulares propriedades* de los Ingredientes, y la *Media*, ò del Mixto, encontrar *quanto* de cada uno ſe requiera para la tal *mixtura*.

2º. Dadas las *particulares propriedades* de los Ingredientes, la *Media*, ò del Mixto, y la *cantidad de uno* de los Simples, encontrar la *cantidad* de los demás.

3º. Dadas las *particulares propriedades* de los Ingredientes, la *Media*, ò del Mixto, y la *Suma total* de las *cantidades* de los Simples, encontrar la *cantidad particular* de cada uno de ellos.

Para eſtos tres caſos daremos tres Reglas, ò tres Problemas, teniendo preſente para ſus demonſtraciones, que eſte Methodo de la *Alligacion Alternada*, no es otra coſa, que el *inverſo* de la *Alligacion Media*.

PRO-

192 PROBLEMA I. *Dadas las particulares Propriedades de los Simples, y la Media, ò del Mixto, encontrar quanto de cada uno ſe requiera para la tal mixtura.*

Regla. *Tomenſe las diferencias particulares, por las quales la particular propriedad de cada Simple ſe diferencia de la Propriedad Media, ò del Mixto, y eſtas diferencias alternadamente pueſtas exprimirán las cantidades de los Simples, que para tal mixtura ſe requieren.*

En las Queſtiones de eſta eſpecie, en que entraſſen *dos*, ò *quatro* Simples, de los quales *una mitad* de las propriedades particulares es *mayor*, y otra *mitad* es *menor*, que la propriedad *Media*, diſponganſe eſtas particulares propriedades de ſuerte, que una *mayor*, y otra *menor* eſtén *ſobre*, otra *menor*, y otra *mayor* eſtén *baxo* de la *propriedad Media*, como ſe verá en los Exemplos ſiguientes.

EXEMPLO I.

Un Artifice ha de mezclar Cobre de 5.25 Onzas *por* Pulgada *con Eſtaño de* 4.25 *para hacer un Bronce, ò Mixto de* 5.05 Onzas *por* Pulgada, *quanto habrá de mezclar de cada Metal ſimple?*

La Operacion ſe arregla aſſi

Peſo Medio. Onzas.		*Peſos particulares.* Onzas.	*Diferencias alternadas.*	Pulg.
5.05	*Cobre*	5.25	5.05 — 4.25 = 0.8	*Cobre*
	Eſtaño	4.25	5.25 — 5.05 = 0.2	*Eſtaño*

Pues

Pues habrá de poner 0.8 Pulgadas de *Cobre* por cada 0.2 Pulgadas de *Eſtaño*, eſto es, 4.2 Onzas *Cobre* por cada 0.85 Onzas *Eſtaño*.

193 Pero adviertaſe, que no ſolo eſtas cantidades de Simples darán un Mixto de eſta eſpecie, ſino tambien todas las demás cantidades de los miſmos Metales, *que eſtén en la miſma Proporcion*, pues eſtos Problemas no tanto mueſtran las cantidades abſolutas, que ſe han de mezclar, como las *Proporciones*, que eſtas cantidades han de tener entre sí.

Por lo tanto, tendrémos

		Cobre.	*Eſtaño.*	
		Pulg.	Pulg.	
Pulg.	Pulg.			
0.8	: 0.2 ::	8 : 2		Todas darán una miſma eſpecie de *Mixto.*
		15 : 3.75		
		13 : 3.25		

EXEMPLO II.

Un Artifice quiere mezclar Eſtaño de 4.25 Onzas *por* Pulgada, *Azogue de* 6.61, *Cobre de* 5.25, *y Antimonio de* 1.98 *para hacer un Mixto de* 4.3 Onzas *por* Pulgada, *quanto habrá de poner de cada Simple de eſtos?*

Operacion:

Peſo Medio.	*Peſos particulares.*	*Diferencias alternadas.*			
	Onzas.				Pulg.
Onzas.	6.61	4.3	— 4.25	= 0.05	*Azogue*
4.3	4.25	6.61	— 4.3	= 2.31	*Eſtaño*
	1.98	5.25	— 4.3	= 0.95	*Antimonio*
	5.25	4.3	— 1.98	= 2.32	*Cobre*

Por

Por consiguiente tambien todas las cantidades de estos Simples, que estén en la misma Proporcion; porque

Azogue.	*Estaño.*	*Antimonio.*	*Cobre.*
0.05	2.31	0.95	2.32
			× 3
0.15	6.93	2.85	6.96
			× 4
0.6	27.72	11.4	27.84

los quales productos todos están en una misma proporcion, por consiguiente mezclandose darán Mixto de la misma qualidad.

194 Pero si una de las *particulares Propriedades* dadas de los Ingredientes fuesse $\left\{\begin{matrix} Mayor \\ Menor \end{matrix}\right\}$, y todas las demás $\left\{\begin{matrix} Menores \\ Mayores \end{matrix}\right\}$, que la *propriedad Media*, ò del Mixto, las Diferencias (iguales à las *cantidades* de los Simples, que han de entrar en la mixtura) se deben alternar como en los siguientes

EXEMPLOS.

Peso Medio.	*Pesos part.*	*Diferencias alternadas.*
20	18	2 + 4
	22	2
	24	2
4	2	1 + 5 + 13
	5	2
	9	2
	17	2

Peso Medio.	*Pesos part.*	*Diferencias alternadas.*
20	14	4
	18	4
	24	6 + 2
40	10	8
	25	8
	36	8
	48	30 + 15 + 4

Apli-

Aplicando al *Mayor*, ò *Menor* Peſo particular la *Suma* de todas las otras Diferencias, y à cada uno de los otros la *Diferencia*, por la qual el *Mayor*, ò *Menor* Peſo particular ſe diferencia del Peſo *Medio*. La demonſtracion de eſto es, porque, en el 2º. Exemplo, ſumando tales Diferencias, que ſon la *Suma de las cantidades*, tendrémos 25; multiplicando cada cantidad por ſu reſpectivo Peſo, ſerá la Suma de los Productos, ò de los Peſos = 100, pues por la *Alligacion Media*, tendrémos *Suma de Cantidades* (25) : *Suma de Peſos* (100) :: 1 : $\frac{100}{25}$ (= 4) *Peſo Medio*.

195 PROBLEMA II. *Dadas las particulares Propriedades de los Ingredientes, ò Simples, la Propriedad Media, ò del Mixto, y la cantidad de uno de los Ingredientes, encontrar la cantidad de qualquiera de los demás.*

Eſta ſe llama *Alligacion Alternada Parcial*, por darſe Parte de los Ingredientes.

Pueſtas la *Propriedad Media*, ò del Mixto, las *Propriedades particulares* de cada uno, y las *Diferencias alternadas* como el Problema precedente, la Regla ſe funda en eſta Proporcion:

Como la Diferencia opueſta al Simple, *cuya cantidad ſe da*
Es à la Cantidad *que ſe da:*
Aſſi qualquier otra Diferencia *ya alternada*
Es à la Cantidad, *que correſponde de* ſu Simple.

EXEM-

EXEMPLO.

Se quiere hacer un Mixto de Cobre, que peſa à 5.25 Onzas *por* Pulgada, *Eſtaño de* 4.25, *Antimonio de* 1.98, *y Azogue de* 6.61. *El Mixto ha de ſer de* 4.3 Onzas *por* Pulgada, *ſe ponen* 8.5 Pulgadas *cubicas de Cobre, quanto ſe habrá meneſter de cada Simple de los demás?*

Arregleſe la Operacion de eſta ſuerte:

Peſo Medio.	*Peſos partic.* Onzas.	*Diſer. altern.* Pulg.	
Onzas.	6.61	0.05	*Azogue*
4.3	4.25	2.31	*Eſtaño*
	1.98	0.95	*Antimonio*
	5.25	2.32	*Cobre*

Proporcion:

Pulgadas.

$$2.32 : 8.5 :: \left\{\begin{matrix} 0.05 : 0.183 \\ 2.31 : 8.463 \\ 0.95 : 3.480 \end{matrix}\right\} \text{de} \left\{\begin{matrix} \textit{Azogue} \\ \textit{Eſtaño} \\ \textit{Antimonio.} \end{matrix}\right.$$

196 PROBLEMA III. *Dadas las particulares Propriedades de los Simples, la Propriedad Media, ò del Mixto, y la Suma de todas las cantidades de los Simples, que en el Mixto entran, encontrar la cantidad particular de cada Simple, que en él hai.*

Eſte Methodo ſe llama *Alligacion Alternada Total.*

Pueſ-

Pueſtas la Propriedad Media, ò del Mixto, las Propriedades particulares de cada Simple, y las Diferencias alternadas como en los Problemas antecedentes, la Regla ſe funda en eſta Proporcion:

Como la Suma *de todas las Diferencias*
Es al Total *de las Cantidades*:
Aſſi cada particular Diferencia
A la particular Cantidad *del Simple que le correſponde.*

EXEMPLO.

Para hacer un Mixto de 84.25 Pulgadas cubicas, *que peſe* 4.3 Onzas *por* Pulgada, *compueſto de Cobre de* 5.25, *Eſtaño de* 4.25, *Azogue de* 6.61, *y Antimonio de* 1.98 Onzas *por* Pulgada, *quanto ſe habrá meneſter de cada uno de eſtos Simples?*

Arregleſe la Operacion como en el Problema antecedente:

Peſo Medio.	*Peſos partic.* Onzas.	*Difer. altern.* Pulg.	
Onzas.	6.61	0.05	*Azogue*
4.3	4.25	2.31	*Eſtaño*
	1.98	0.95	*Antimonio*
	5.25	2.32	*Cobre.*
	Suma	5.63	

Pro-

Proporcion:

Suma de Dif.	*Cãtidad total.*	*Difer. partic.*	*Cantidad buſcada.* Pulgadas.		
5.63 : 84.25 ::		0.05 :	0.748	de	*Azogue*
		2.31 :	34.567		*Eſtaño*
		0.95 :	14.216		*Antimon.*
		2.32 :	34.717		*Cobre.*

197 Pero es neceſſario advertir acerca la *Alligacion Alternada*, que aunque todas eſtas Combinaciones, ò Proporciones dadas haſta aquí, ò reſpueſtas à los Problemas ſean verdaderas, y exactas, no obſtante ni ſon *todas* las Combinaciones, ò Proporciones, ni todas las reſpueſtas, que dichos Problemas pueden tener, con las quales ſe ſatisfaga à las condiciones dadas. Aſſi en el Exemplo 2º. del primer Problema, es verdad, que la Mixtura de 0.05 de *Azogue*, 2.31 de *Eſtaño*, 0.95 de *Antimonio*, y 2.32 de *Cobre*, y todas las demás cantidades de eſtos Metales, que eſtén en la miſma Proporcion, darán un Mixto de 4.3 *Onzas* por *Pulgada*; pero no ſolo eſtas cantidades de eſtos Metales darán un Mixto de eſte peſo, ſino tambien 2.32 de *Azogue*, 2.31 de *Antimonio*, 0.95 de *Eſtaño*, 0.05 de *Cobre*.

La razon de eſto es, porque la Arithmetica aunque da la Combinacion exacta, pero no da *todas* las exactas, que ſufren los Problemas, y aſſi es fuerza à veces recurrir à la Al-

gebra, por no haber llegado aun la Arithmetica en eſte punto à ſu mayor perfeccion. Veanſe no obſtante las Formulas Generales de los Reſultados, à que mas ſe puede llegar en eſte punto, que trahe Mr. Benjamin Martin en ſu *The Young Student's Memorial Book, or Pocket Library*, en donde da un Methodo para encontrar las Soluciones todas, de que ſon capaces ſemejantes Problemas de *Alligacion Alternada.*

CAPITULO X.

De la Razon Compueſta, ò de la Compoſicion de Razones.

ARTICULO PRIMERO.

Explicaſe la Compoſicion de Razones.

198 COmo una Razon puede ſer *mayor que otra*, puede la Razon aumentarſe, y diſminuirſe, por lo tanto ſerá capaz de *Compoſicion de Partes*; pero aſſi como las partes de una linea ſon lineas, que juntas la *componen*, aſſi las partes de una *Razon Compueſta* deben ſer otras Razones, que juntas la compongan. Quan-

Quando cotejamos dos Razones para averiguar, qual ſea *mayor*, ò *menor*, el medio mas ſeguro *es reducirlas à un miſmo antecedente, ò à un miſmo conſiguiente.* Por exemplo dada la Razon de 7 à 5, y la de 4 à 3, ſe buſca qual ſea mayor? Reduzgaſe la Razon de 7 à 5 à otra que le ſea igual, y tenga por antecedente 4, de eſta ſuerte $7 : 5 :: 4 : \frac{4 \times 5}{7}$ $= 2\frac{6}{7}$, luego la Razon de $7 : 5$, y la de $4 : 2\frac{6}{7}$ ſon las miſmas, ò iguales; cotejando pues ahora la Razon de $4 : 3$ con la de $4 : 2\frac{6}{7}$, facilmente ſe ve, que $4 : 2\frac{6}{7}$ es *mayor* que $4 : 3$, pero $4 : 2\frac{6}{7} = 7 : 5$; luego la Razon de $7 : 5$ es *mayor* que de $4 : 3$.

199 LEMMA I. *Si hai una Série de quantas quiera quantidades* $\left\{\begin{matrix} A, B, C, D \\ 48, 40, 30, 15 \end{matrix}\right\}$, *que vayan ſucceſſivamente ò creciendo, ò diſminuyendo, la Razon, que tienen entre sí los extremos, es Compueſta de todas las Razones intermedias.*

Aſſi la Razon A : D es compueſta de las Razones A : B, B : C, C : D, que forman una Série continua. Demos, que las quatro letras A, B, C, D en vez de ſignificar quantidades, ſignifiquen puntos. No hai duda, que el eſpacio AD ſe compondria de los eſpacios intermedios, y ſe reſolveria en ellos, como en ſus partes. Pues no hai diferencia alguna en-

tre la *Compoſicion*, y *Reſolucion* de Râzones, y la compoſicion, y reſolucion de qualquier otro continuo; de aquí es, *que la Razon de un numero à otro* (como de 6 à 2) *es compueſta de todas las Razones, que tienen entre sí los numeros intermedios, quebrados, y enteros, que ſe puedan imaginar entre 6, y 2*, por conſiguiente *de todas las Razones ſus iguales.*

200 LEMMA II. *Aſſi como una Linea dividida en muchas partes iguales es tantupla de cada parte, quanto es el numero de partes en que ſe divide, aſſi una Razon Compueſta de muchas Razones iguales es tantupla de cada una de ellas, quanto es el numero de Razones de que ſe compone.*

En la Proporcion continua ∴ 9 : 6 : 4, ſiendo iguales la Razon de 9 : 6, y la de 6 : 4, ſerá la de 9 : 4 *Dupla* de la Razon de 9 : 6, ò bien de la de 6 : 4, y cada una de eſtas ſerá *Subdupla*, ò la *mitad* de la de 9 : 4; ſi eſta ſe compuſieſſe de tres Razones iguales ſería *Tripla* de cada una de ſus componentes, que ſería ſu *Subtripla*, *&c.* Pero comunmente ſe dice *Duplicada*, *Triplicada*, *Subduplicada*, *Subtriplicada*, *&c.*

201 De aquí es, que ſegun el comun modo de hablar hai diferencia entre Razon *Dupla*, ò *Doble*, y Razon *Duplicada.* Razon *Dupla* es una ſimple Razon, en que el antecedente es *Duplo* de ſu conſiguiente, y mira ſo-

lo

lo las quantidades, de ſuerte que à no ſer el uſo, mejor ſe diria *Razon de Doble*, que *Razon Doble*; de donde decir, que una quantidad es à otra en *razon Doble*, es decir, que el antecedente es *Duplo* de ſu conſiguiente. Razon *Duplicada* es la compueſta de dos Razones iguales, ò de una dos veces tomada, que es lo miſmo; y una quantidad eſtar à otra en *razon Duplicada* de otra Razon, es decir, que la Razon de una quantidad à otra es igual à la *Razon Compueſta* de otra Razon dos veces tomada, ò de ella, y otra igual.

Como en toda Série de quantidades, que eſtén en proporcion Geometrica continua, las Razones de un termino à ſu immediato ſon iguales entre sí, y la del primer termino al ultimo es compueſta de todas ellas, por ſer extremos de una Série de Razones continuas, *la Razon del tercer termino al primero, ſerá duplicada de la Razon comun*, eſto es, *del ſegundo al primero, ò del tercero al ſegundo, ò de qualquier termino à ſu immediato*, pues todas eſtas Razones ſon iguales. La Razon del quarto termino al primero ſerá *Triplicada*, *&c.* porque ſe compondrá de tres Razones iguales. Mas ſiendo qualquier Série de Potencias de una miſma Raiz (a, a^2, a^3, a^4, *&c.*) una Progreſſion Geometrica, la Razon del tercer termino al primero ſerá tambien duplicada de la Razon comun; y en general *la Razon de qualquier*

quier Potencia à ſu Raiz ſerá tantuplicada de la Razon comun, quanto indica ſu Exponente diſminuido de una unidad.

Aſſi la Razon de $a^4 : a$ ſerá *triplicada* de la de $a^2 : a$, la Razon de $a^n : a$ es $n - 1$ *plicada* de la Razon comun; y *la Razon de qualquier Potencia à 1 es tantuplicada de la Razon comun, como exprime el Exponente de la Potencia.* Por lo tanto la Razon de $a^5 : 1$ es quintuplicada de la de $a : 1$.

ARTICULO II.

Las quatro Operaciones Arithmeticas con las Razones.

202 COmo las Razones ſon quantidades, que ſe pueden aumentar, y diſminuir, ſe podrán con ellas hacer las quatro Operaciones comunes de la Arithmetica, eſto es, ſe podrán Sumar para hacer una Suma, que ſea *Razon Compueſta* de dos, ò mas Razones, ſe podrán Reſtar para encontrar la Razon, que ſea *Diferencia de una à otra*, ſe podrán Multiplicar para formar una Razon *Multiplicada de otra*, ò compueſta de otras iguales, finalmente ſe podrán Dividir para ver, quantas veces una Razon contiene la otra, ò quantuplicada ſeá una de otra, lo qual,

qual, para penetrar mas à fondo eſta doctrina de Razones, enſeñarémos en eſte Articulo.

203 PROBL. I. *Sumar, ò Componer Razones.*

Regla 1ª. *Si las Razones que ſe deben Sumar, forman una Série de Razones continuas* (eſto es, que el conſiguiente de una Razon ſea antecedente de la otra) *la Suma de eſtas Razones, ò la Razon Compueſta de todas ellas, ſerá la que tiene el primer termino al ultimo.*

Aſſi hayanſe de Sumar todas eſtas Razones $a:b$, $b:c$, $c:d$, la Suma de todas ellás ſerá la Razon $a:d$, y a ſerá à d, en la Razon Compueſta de a à b, de b à c, y de c à d. Si todas eſtas Razones fueſſen iguales, ſerá *Multiplicada* de cada una de ellas.

Regla 2ª. *Si las Razones que ſe deben Sumar fueſſen diſcontinuas* (eſto es, que el conſiguiente de la una no fueſſe antecedente de la otra) *reduzganſe à una Série de Razones continuas, que comience por exemplo de 1, y la Razon del primer termino al ultimo, ſerá la Razon Compueſta de todas ellas.*

Hayanſe de Sumar eſtas Razones diſcontinuas $a:b$, $c:d$, $e:f$. Reduciendolas por el ſiguiente methodo à Razones continuas, ſerán

$$a:b :: 1 : \frac{b}{a}$$

$$c:d :: \frac{b}{a} : \frac{bd}{ac}$$

$$e:f :: \frac{bd}{ac} : \frac{bdf}{ace}$$

Eſ-

Esto es $a:b, c:d, e:f$ las mismas que

$$1 : \frac{b}{a}, \frac{b}{a} : \frac{bd}{ac}, \frac{bd}{ac} : \frac{bdf}{ace};$$

y siendo esto una Série de Razones continuas, la del primer termino al ultimo será la Suma de todas las intermedias, luego la Suma de las Razones $a:b, c:d, e:f$ es igual à esta Razon $1 : \frac{bdf}{ace}$; multiplicando pues entrambos terminos por ace, será $ace : bdf$, que es la Razon del *producto de los antecedentes, al producto de los consiguientes* de las Razones dadas; de donde se saca por Regla general: *Para Sumar muchas Razones, ò formar una Compuesta de muchas otras, multipliquense todos los antecedentes entre sí, y multipliquense tambien entre sí todos los consiguientes de las Razones dadas, y la Razon que tengan entre sí estos productos, será la Suma, ò la Razon Compuesta de las que tienen entre sí los factores*; que es lo que comunmente se dice, *la Razon Compuesta de otras Razones es la que tiene el producto de los antecedentes con el producto de los consiguientes.*

204 PROBLEMA II. *Quitar, ò Restar una Razon de otra.*

Regla 1ª. *Si las Razones tubiessen un mismo antecedente, la Diferencia de entrambas sería la Razon, que tienen entre sí los consiguientes*, esto es, *el consiguiente de la Razon, que se ha de*

de quitar, con el conſiguiente de aquella de quien ſe hace la ſubſtraccion.

Hayaſe de quitar la Razon $a : b$ de la de $a : c$. Siendo la Razon $a : c$ compueſta de las Razones $a : b$, $b : c$, quitando la Razon $a : b$, la Diferencia ſerá $b : c$, eſto es, la Razon de los conſiguientes, y ſe ve, porque Sumando la Razon $b : c$, que es la Diferencia, con la Razon $a : b$ que ſe quita, la Suma $a \times b : b \times c$, es la Razon Compueſta $a : c$ $(= a \times b : b \times c)$. Eſta Regla vale tambien, aunque la Razon que ſe haya de quitar fueſſe de diferente eſpecie, que aquella de quien ſe quita, eſto es, la una de *mayor desigualdad*, y la otra de *menor desigualdad*. Aſſi quitando la Razon $6 : 8$ de la Razon $6 : 3$, la Diferencia ſerá $8 : 3$, porque Sumando $8 : 3$ con $6 : 8$, la Suma es $8 \times 6 : 8 \times 3 = 6 : 3$, Razon Compueſta de entrambas.

205 Regla 2ª. *Si las Razones entre quienes ſe ha de hacer la ſubſtraccion tubieſſen diferentes antecedentes, reduzganſe à un miſmo antecedente, y el reſiduo, ò la Diferencia de las Razones ſerá la Razon de los conſiguientes.*

Hayaſe de quitar la Razon $c : d$ de la de $a : b$. Reduzgaſe la Razon $c : d$ à otra expreſſion que le ſea igual, y tenga por antecedente a, de eſta ſuerte $c : d :: a : \frac{ad}{c}$; con que quitar la Razon $c : d$ de la de $a : b$, ſerá lo miſmo

que

que quitar la Razon $a : \frac{ad}{c}$ de la de $a : b$, que por conſiguiente ſerá compueſta de las Razones $a : \frac{ad}{c}, \frac{ad}{c} : b$, con que quitando $a : \frac{ad}{c}$, la Diferencia ſerá la Razon $\frac{ad}{c} : b = ad : bc = \frac{d}{c} \times \frac{a}{b}$. De donde ſe ſaca la Regla general: *Para quitar una Razon de otra, inviertaſe la Razon que ſe ha de quitar, ſumeſe con aquella de quien ſe hace la ſubſtraccion, y eſta Razon Compueſta ſerá la Diferencia de entrambas Razones*, ſean eſtas Razones, que ſe reſtan, de una miſma, ò diferente eſpecie.

Aſſi quitando la Razon 8 : 5 de la de 9 : 4, la Diferencia ſerá $9 \times 5 : 4 \times 8$; porque ſumando eſta Diferencia con la Razon 8 : 5, que ſe ha quitado, la Suma vuelve à ſer la Razon $9 \times 5 \times 8 : 4 \times 8 \times 5$ (= 9 : 4); de la miſma ſuerte quitando la Razon 5 : 9 de la de 6 : 4, la Diferencia ſerá $9 \times 6 : 5 \times 4$, la qual ſumandola con la Razon 5 : 9, la Suma volverá à ſer $9 \times 6 \times 5 : 5 \times 4 \times 9$ (= 6 : 4).

206 PROBLEMA III. *Multiplicar Razones.*

Multiplicar una quantidad, es tomar muchas veces dicha quantidad, ò encontrar un Producto, que la contenga tantas veces, quantas el Multiplicador contiene la unidad. Aſſi tambien Multiplicar una Razon es tomar muchas veces dicha Razon, ò encontrar otra, que

que la contenga tantas veces, como unidades hai en el Multiplicador; de donde Multiplicar la Razon $a : b$ por 2, ſerá *doblarla*, ò *duplicarla*, eſto es, *quadrar* los terminos, y el Producto ſerá $a^2 : b^2$; multiplicarla por 3, ſerá triplicarla, ò *cubar* ſus terminos $a^3 : b^3$, &c. en general $a^n : b^n$, ſerá *una Razon tantuplicada de la Razon* a : b, *como exprime el Exponente* n; de donde los Quadrados eſtarán en razon *duplicada*, los Cubos *triplicada*, &c. de ſus Raices, por conſiguiente las Raices eſtarán en razon *ſubduplicada* de los Quadrados, y *ſubtriplicada* de los Cubos, &c.

Pero adviertaſe, que aunque toda Razon *Multiplicada* ſea Razon *Compueſta*, pero no toda Razon Compueſta es Razon Multiplicada; porque el Multiplicar una Razon no ſe toma tanto de que ſe multipliquen entre sí ſus terminos homologos, como de que ſe tome una Razon dos, ò mas veces, y ſe forme de ella una Razon ſu multiplice, ò que la contenga muchas veces. Aſſi ſi multiplicamos entre sí los terminos homologos de eſtas dos Razones $5 : 3$, $4 : 3$, la Razon que reſulte $5 \times 4 : 3 \times 3$ ($= 20 : 9$) no ſerá Multiplicada de ninguna de ellas; pero ſerá Compueſta de entrambas.

207 PROBLEMA IV. *Dividir Razones.*

La Diviſion es la operacion inverſa de la Multiplicacion, pues aſſi como una Razon ſe du-

duplica, ò multiplica por 2, quadrando ſus terminos, ſe triplica cubandolos, &c. aſſi ſe parte por 2, ò ſe encuentra ſu Razon ſubduplicada, ſacando la Raiz Quadrada de ſus terminos, ſe parte por 3, ò ſe encuentra ſu Razon ſubtriplicada, ſacando la Raiz Cubica, &c. En general *las Raices eſtán en razon ſubtantuplicada de las Potencias, quantuplo es el Exponente de las Raices reſpecto de la unidad.* De donde $\sqrt[5]{a} : \sqrt[5]{b}$ es ſubquintuplicada de la Razon $a : b$, ò es el Quociente de la Razon $a : b$ dividida por 5.

208 ESCOLIO. Supueſto pues que los Mathematicos dividen las Razones en Razon de *igualdad*, Razon de *desigualdad mayor*, y Razon de *desigualdad menor*, ſi diſtinguimos eſtas Razones ſegun ſus *efectos en orden à la Compoſicion*, la Razon de mayor desigualdad ſe podrá conſiderar como *afirmativa*, ò *poſitiva*; porque aſſi como la quantidad afirmativa, ò poſitiva ſiempre aumenta la quantidad à quien ſe añade, aſſi la Razon de mayor desigualdad ſiempre aumenta la Razon à quien ſe junta. Por lo tanto ſi à la Razon 5 : 3 añadimos la Razon de mayor desigualdad 3 : 2, la Suma, ò la Compueſta de entrambas, ſerá la de $5 \times 3 : 3 \times 2 = 15 : 6 = 5 : 2$; pero la Razon 5 : 2 es mayor que la de 5 : 3, luego la Razon de mayor desigualdad 3 : 2 au-

aumenta aquella à quien ſe junta; por lo tanto ſe ha de conſiderar como *afirmativa*, ò *poſitiva*.

Al contrario ſi à la Razon 5 : 3 añadimos la de *menor desigualdad* 3 : 4, la Suma, ò la Razon Compueſta de entrambas ſerá la de $5 \times 3 : 3 \times 4 = 15 : 12 = 5 : 4$; pero la Razon 5 : 4 es menor que la de 5 : 3, luego la Razon de *menor desigualdad* diſminuye aquella à quien ſe junta, y aſſi ſe habrá de conſiderar como *negativa*.

Finalmente ſi à la Razon 5 : 3 añadimos la de *igualdad* 3 : 3, la Suma, ò la Razon Compueſta ſerá $5 \times 3 : 3 \times 3 = 15 : 9 = 5 : 3$, luego la Razon de igualdad ni aumenta, ni diſminuye aquella à quien ſe junta, por lo tanto ſe habrá de conſiderar en orden à la Compoſicion de Razones como o, que ni aumenta, ni diſminuye la quantidad à quien ſe añade.

De aquí ſe ſigue 1°. *Que la Suma, ò Razon Compueſta de dos, ò mas Razones de mayor deſigualdad, ſiempre es mayor que ninguna de ellas*, como ſe ve en las Razones de los terminos de la Série de Potencias a, a^2, a^3, a^4, &c. en la qual la Razon de cada termino à 1 ſiempre es mayor que ninguna de las intermedias de que ſe compone.

2°. *Que la Razon Compueſta de dos, ò mas Razones de menor desigualdad, es menor que ninguna de ellas*, como ſe ve en la Razon de 1 à

los

los terminos de la Série de Potencias a, a^2, a^3, a^4, &c. en la qual la Razon $1 : a^2$ es compuesta de las de $1 : a$, $a : a^2$, y es menor que ninguna de ellas. Mas como entrambas Razones $1 : a$, $a : a^2$ son iguales, la de $1 : a^2$ es duplicada de cada una de ellas; y es cierto, que no pudiera la Razon $1 : a$ ($= \sqrt{1} : \sqrt{a^2}$) ser *subduplicada* de la de $1 : a^2$, si esta no le fuera *duplicada*; de donde se compone mui bien (y es necessario, que sea en las *Razones de menor desigualdad*) que una Razon sea *subduplicada*, y submultiplicada de otra, y que sea *mayor* que ella, y se ve en la Razon $\sqrt{1} : \sqrt{a^2}$ ($= 1 : a$), que es subduplicada de la de $1 : a^2$, y con todo esso es mayor la Razon $\sqrt{1} : \sqrt{a^2}$ ($= 1 : a$), que la de $1 : a^2$, como se ve por sus Exponentes $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$.

3°. *Que la Razon Compuesta de una de mayor, y otra de menor desigualdad, siempre es menor, que sola la Razon de mayor desigualdad componente, y mayor que sola la Razon de menor desigualdad de que se constituye*; pues al mismo tiempo que la de *mayor desigualdad* aumenta la de *desigualdad menor* à quien se junta, esta disminuye à la otra. Assi la Razon Compuesta $5 \times 9 : 8 \times 6$ ($= 5 : 5\frac{1}{5} = 9 : 9\frac{3}{5}$) es *mayor* que la Razon $5 : 8$, y *menor* que la Razon $9 : 6$ de las quales se compone.

Esta distincion de Razones en *Afirmativas*, y

y *Negativas* en orden à la Compoſicion no es nueva entre los Mathematicos, y ſe puede ver en Saunderſon Profeſſor de Mathematicas en la Univerſidad de Cambridge *lib.* 7. §. 295.

CAPITULO XI.

De las Potencias, ò Elevacion de las quantidades.

ARTICULO PRIMERO.

De las Potencias de las quantidades Simples.

209 LOS *Productos*, que ſalen de la Multiplicacion continua de una quantidad por sí miſma, y por ſus productos, ſe llaman *Potencias*, ò *Grados* de dicha quantidad, la quantidad ſe llama *Raiz* de eſtas Potencias, y el levantar las quantidades à tales Potencias ſe llama *Elevacion de quantidades*. El producto que ſale de la primera multiplicacion ſe llama el *Quadrado*, ò *Segunda Potencia*. Aſſi $a \times a = a^2$ es el Quadrado de a. Si eſte Quadrado a^2 lo multiplicamos otra vez por a, tendrémos $a^2 \times a = a^3$ *Cubo*, ò la *Tercera Potencia* de a. Si el Cubo a^3 lo

a^3 lo multiplicamos otra vez por la Raiz a, tendrémos $a^3 \times a = a^4$ *Quarta Potencia*, y assi al infinito. Advirtiendo, que la Raiz, ò la quantidad misma es su *Primera Potencia*; de donde $a = a^1$.

Las Potencias de quantidades simples se pueden poner con Exponentes

$$a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6,$$

ò sin ellos

$$a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, aaaaaa,$$

poniendo la Raiz muchas veces; pero esta diferencia consiste solo en el modo de la Expression.

Estas Potencias, que se forman por continua multiplicacion de la Raiz a, y tienen sus Exponentes positivos, se llaman *Potencias positivas* de a, cuya denominacion viene de su Exponente positivo, y van succesivamente creciendo, formando una Série, que es una Progression Geometrica.

210 Pero si assi como hemos multiplicado a muchas veces por sí misma, la dividimos tambien muchas veces por sí misma, tendrémos $\frac{a}{a} = 1$ (de donde se saca, *que qualquier quantidad dividida por sí misma es igual à la unidad*) si dividimos este Quociente por a, tendrémos $\frac{a}{aa} = \frac{1}{a} = \frac{1}{a^1}$; si otra vez, resultará

tará $\frac{1}{aa} = \frac{1}{a^2}$; otra vez $\frac{1}{aaa} = \frac{1}{a^3}$; con que *qualquier quantidad entera* (a) *por Multiplicacion forma una Série creciente* a, a^2, a^3, &c. *por Division una Série decreciente* $1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}$, &c.

Pero como las Potencias de una misma Raiz se dividen entre sí, quitando el Exponente del Divisor del Exponente del Dividendo, para tener el Exponente del Quociente, será $\frac{a^1}{a^1} = a^{1-1} = a^0 = 1$; luego *toda quantidad, que tiene por Exponente* 0, *será* = 1. Dividiendo pues a^0 por a, tendrémos $\frac{a^0}{a} = a^{0-1} = a^{-1}$. Dividiendo otra vez por a, tendrémos $\frac{a^{-1}}{a} = a^{-1-1} = a^{-2}$; luego las Potencias de a, que se forman por division

serán $a^0, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-5}$,

ò bien $1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^5}$,

que solo se diferencian en la expresion, y assi $a^0 = 1$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, &c.

211 Pero porque $a^{-2} = a^{0-2} = \frac{a^0}{a^2} = \frac{1}{a^2}$, y $\frac{a^{-2}}{a^{-5}} = a^{-2+5} = a^{-2} \times a^5$, se saca la Regla general: *Toda quantidad, que esté en el Denominador de una Fraccion, se puede poner en el*

Numerador, y la que eſté en el Numerador, ſe puede poner en el Denominador, mudando ſólo el ſigno de ſu Exponente; pues $\frac{a^{-2}}{b} = \frac{b^{-1}}{a^2}$, $\frac{b^2}{a^{-3}} = \frac{a^3}{b^{-2}} = b^2 a^3$.

Y lo que es mas: *Qualquier quantidad, que eſté à modo de Entero, ſe puede poner à modo de Fraccion, cuyo Numerador ſea la unidad, y el Denominador la quantidad miſma, mudando el ſigno de ſu Exponente.* Aſſi $a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$; porque $a^2 = 1 \times a^2 = a^{0+2} = a^0 \times a^2 = \frac{a^0}{a^{-2}} = \frac{1}{a^{-2}}$: pues eſto ſolo es mudar la expreſſion, pero no el valor de las quantidades.

Eſtas Potencias pues de una quantidad, que ſe forman por la *Diviſion* de la quantidad, y de los Quocientes por sí miſma, ſe llaman *Potencias negativas* de la tal quantidad a, no porque en realidad ſean quantidades negativas, pues $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, que es una Fraccion poſitiva, ſino porque comunmente ſe ponen con Exponente negativo, como a^{-2}; pero ſon Potencias poſitivas de $\frac{1}{a}$, pues ſe forman tambien por multiplicacion de $\frac{1}{a}$ por sí miſma.

212 En quanto à los *Signos de las Potencias*,

cias, ſe ve bien, que el *Signo de qualquier Potencia de qualquier quantidad poſitiva, debe ſer poſitivo* (+); porque ſiempre en tal caſo ſe multiplica, ò divide + por +, que da en el Producto, ò en el Quociente +; por lo tanto las Potencias de $+a$, ſerán $+a^2$, $+a^3$, $+a^4$, &c. y en las Potencias negativas de $+a$, aunque los Signos de los Exponentes ſean comunmente negativos, no obſtante los Signos de las Potencias ſiempre ſon poſitivos, pues $a^{-1} = +a^{-1} = +\frac{1}{a}$.

Quando la quantidad, ò Raiz que ſe debe levantar à alguna Potencia, es negativa, como $-a$, *los Exponentes, y los Signos de los Exponentes ſon los miſmos, que los de las quantidades poſitivas*: pero *los Signos de las Potencias van alternando*; *la Potencia, cuyo Exponente es numero Par, tiene el Signo poſitivo*; *ſi el Exponente es numero Impar, el Signo de la Potencia es negativo.*

Aſſi las Potencias de $-a$ ſon $-a$, $+a^2$, $-a^3$, $+a^4$, $-a^5$, *&c.* en las quales la *Segunda*, y *Quarta* Potencia ſon $+a^2$, $+a^4$; pues la Segunda Potencia ſe forma de $-a \times -a$, y la Quarta de $-a^3 \times -a$, y $- \times -$ da en el Producto +, lo miſmo en todas otras Potencias de Exponente *Par*; pero la *Tercera*, y *Quinta* Potencia $-a^3$, $-a^5$ tienen ſignos negativos; pues la Tercera Potencia ſe forma de la

Segunda, y de la Raiz $+a^2 x - a$, y la Quinta de la Quarta, y de la Raiz $+a^4 x - a$, y $+ x -$ da en el Producto $-$.

213 *Quando un termino ſe eleva à alguna Potencia, deben por conſiguiente levantarſe à la miſma todos ſus factores, y coeficientes.* Aſſi ab levantado à la Segunda Potencia ſerá a^2b^2, y $3ab$ à la Potencia *Tercera*, ò *Cubo* ſerá $3^3a^3b^3 = 27a^3b^3$: aunque para abreviar ſe podrá echar una liníta ſobre todo el termino, ò incluirlo entre ( ), y poner à la derecha algo mas alto el Exponente de la Potencia; por lo tanto $3^3a^3b^3 = \overline{3ab}^3 = (3ab)^3$.

214 *Para elevar à Potencias las Fracciones, ſe habrán de elevar Numerador; y Denominador*; pues el levantar una quantidad à Potencia es multiplicarla por sí miſma, y una Fraccion ſe multiplica por sí miſma, multiplicando por sí miſmos Numerador, y Denominador. Aſſi $\frac{a}{b}$ elevado à Quadrado es $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{3}{4}$ elevado à Cubo es $\frac{27}{64}$.

215 Haſta ahora ſolo hemos hablado de levantar à Potencias las quantidades, que, ò no tienen Exponentes, ò que ſolo tienen el que ſiempre ſe ſobreentiende, no habiendo otro, que es 1; pero las Potencias miſmas, ò las quantidades que tienen Exponentes, tambien ſe pueden multiplicar una, ò muchas

chas veces por sí mismas, y assi podrán ser Raices, que se podrán levantar à Potencias.

Assi $a^3 \times a^3 = a^6$ será el Quadrado de a^3, y la Sexta Potencia de a. Assimismo en quantidades numericas, aunque 4 es el Quadrado de 2; pero 4 se puede multiplicar por sí mismo una, y muchas veces, y assi será Raiz de todos los productos, que de dicha multiplicacion saldrán.

Esto presupuesto:

Para levantar qualquier quantidad *Monoma* (tenga, ò no tenga Exponente distinto de la unidad) à qualquier Potencia:

Regla general. *Multiplíquese el Exponente de esta quantidad* (que en tal caso es Raiz) *por el Exponente de la Potencia que se busca, y el producto será el Exponente, que aplicado à la tal quantidad formará la nueva Potencia.*

Assi levantando $a = a^1$ à la Segunda Potencia, será $a^{1 \times 2} = a^2$; levantando a^{-2} à la Segunda Potencia, será $a^{-2 \times 2} = a^{-4}$; levantando $3a^2 b^3$ à Cubo, será $3^{1 \times 3}\ a^{2 \times 3}\ b^{3 \times 3} = 27a^6 b^9$; en general a^m elevado à la Potencia que exprime n, será a^{mn}; porque doblando el Exponente de una quantidad se *quadra*, triplicandole se *cuba*, equivaliendo la adicion de los Exponentes à la multiplicacion de las quantidades (num. 73.). Y assi $a^m \times a^m = a^{2m}$, $a^m \times a^m \times a^m$, &c. hasta n terminos, será a^{nm}.

Guar-

Guardeſe la Regla dada de los ſignos, pues $-a^2$ levantado à Quadrado ſerá $+a^4$; porque $-a^{2\times 2} = -aa \times -aa = +a^4$, y $-a^n$ levantado à Cubo $= -a^{3n}$.

ARTICULO II.

De las Potencias de las quantidades Compueſtas.

216 LAS quantidades Compueſtas, ò que conſtan de muchos terminos, ò bien ſon *Binomias*, ſi ſolo conſtan de dos, ò bien *Trinomias*, ſi de tres, &c. Hablarémos ſolo de la involucion, ò elevacion del Binomio, dando deſpues una Regla general para los Trinomios, Quadrinomios, &c. Es mui corriente en las Mathematicas indicar ſolo la operacion para abreviar, aſſi en breve ſe levanta qualquier quantidad Compueſta à qualquier Potencia, poniendo la tal quantidad entre ( ), ò bien baxo una linea, que la comprenda toda, poniendo à la derecha el Exponente de la Potencia à que ſe debe levantar. Aſſi para levantar la Raiz Compueſta $a+b$ à Quadrado ſerá $(a+b)^2$, à Cubo $(a+b)^3$; aſſimiſmo a^2+b^3 à la Potencia quarta ſerá $(a^2+b^3)^4$; pero eſto ſolo es abreviacion mui uſada, y muchas veces neceſſaria.

Las

217. Las Potencias de las quantidades Compueſtas ſe forman à la larga por multiplicacion de la Raiz por sí miſma, y por ſus productos, como ſe ve en eſta Tabla.

$a+b$ Raiz
$\times\ a+b$
a^2+ab
$\quad ab+b^2$
$a^2+2ab+b^2$ Quadrado, ò Potencia 2ª.
$\times\ a+b$
$a^3+2a^2b+ab^2$
$\quad a^2b+2ab^2+b^3$
$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ Cubo, ò Potencia 3ª.
$\times\ a+b$
$a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3$
$\quad a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4$
$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ Potencia 4ª.
$\times\ a+b$
$a^5+4a^4b+6a^3b^2+4a^2b^3+ab^4$
$\quad a^4b+4a^3b^2+6a^2b^3+4ab^4+b^5$
$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$ Pot. 5ª.
$\times\ a+b$
$a^6+5a^5b+10a^4b^2+10a^3b^3+5a^2b^4+ab^5$
$\quad a^5b+5a^4b^2+10a^3b^3+10a^2b^4+5ab^5+b^6$
$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$
(Pot. 6ª.

Si

218 Si se hubiessen de buscar las Potencias de $a - b$, la operacion se hace de la misma suerte, los terminos serian los mismos con sus Exponentes, y no habria diferencia alguna sino en los signos, que irian alternando de positivo en negativo. *En los terminos en quienes se encontrará la segunda parte del Binomio* (b) *con Exponente impar, el signo del tal termino es —, y en los que se encontrará* b *con Exponente par, el signo del tal termino es +.*

Pues siendo el tal termino el producto de las Potencias de a, que siempre son positivas, y de las Potencias de $-b$, que en los Exponentes pares son positivas, y en los impares negativas, quando los Exponentes de b son pares, entrambos factores del tal termino son positivos, y el producto debe tener el signo +; y si los Exponentes de b son impares, entre los factores del tal termino, uno es positivo, que es la Potencia de a, y otro es negativo, que es la Potencia impar de b, por consiguiente el signo del producto debe ser —. Assi $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, en donde segundo, y quarto termino, en quienes el Exponente de b es impar, son negativos.

219 Ya se ve, que si siempre que se ha de buscar la 4ª., 5ª., ò qualquier otra de las Potencias superiores de una Raiz Binomia, se hubiessen de buscar poco à poco todas las Potencias intermedias, y por continua multiplicacion

cacion llegar à la Potencia que buſcamos, la operacion ſería larga, y enfadoſa; por lo tanto ſe ha de buſcar una Regla, por la qual immediatamente encontremos qualquier Potencia determinada. Para eſto examinemos en una de las Potencias ſus *Terminos*, ſus *Factores*, ſus *Exponentes*, ſus *Coeficientes*, ſus *Signos*, para ſacar de ahí una Regla general para todas.

220 Tomemos pues la Potencia $6^{a.}$ del Binomio $a+b$, eſto es, $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$. Encontramos 1°. *Que el numero de terminos de la Potencia excede de una unidad al Exponente de la Potencia*; aſſi ſi eſte es 6, como en el caſo preſente, el numero de terminos es $6+1=7$; y en general ſi el Exponente de la Potencia es m, el numero de terminos ſerá $m+1$.

2°. *Que cada termino es un producto de Potencias de entrambas partes de la Raiz*; aunque en el primero (a^6) parezca que no hai Potencia alguna de b; pero como $a^6 = 1 \times a^6$, y $1 = b^0$, ſerá $a^6 = a^6b^0$: lo miſmo digo del ultimo (b^6) reſpecto de las Potencias de a.

3°. *Que las Potencias de la primera parte de la Raiz* (a) *van formando una Série, que comienza de la Potencia de Exponente igual al de la Potencia, à que ſe eleva el Binomio* (que en eſte caſo es 6) *y que va ſucceſſivamente diſminuyendo*

$= a^0 b^6$, que, como en él solo hai la Potencia a^0, será el ultimo termino.

Los Coeficientes correspondientes, esto es, el primero del primer termino, &c. serán $1, m, m \times \frac{m-1}{2}, m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}, m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}, m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5}$, &c. Juntando estos Coeficientes à sus respectivos terminos, será $(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + m \times \frac{m-1}{2} a^{m-2}b^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} a^{m-3}b^3 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} a^{m-4}b^4$, &c.

Esto puede servir de Formula, ò Theorema general para levantar qualquier Binomio à qualquier Potencia, dando à las quantidades a, b el determinado valor de las partes del Binomio, y à m el del Exponente de la Potencia, à que el Binomio dado se quiere levantar. Por exemplo si quiero levantar el Binomio à la Potencia 5ª. será $m = 5$, y assi poniendo 5 en todos los terminos en lugar de m en la Formula general, tendré el Binomio levantado à la quinta Potencia, &c.

221 No solo sirve esta Formula general *Newtoniana*, por ser su Autor *Newton*, para levantar un Binomio $(a+b)$ à qualquier Potencia

tencia positiva, que se forma por multiplicacion, sino tambien à qualquier Potencia negativa, ò que se forma por division, es à saber $\frac{1}{(a+b)^1}$, $\frac{1}{(a+b)^2}$, $\frac{1}{(a+b)^3}$, &c. porque estas se pueden reducir à expressiones, cuyas Potencias se formarán por multiplicacion; porque $\frac{1}{(a+b)^3} = (a+b)^{-3}$, luego haciendo en la Formula general $m = -3$, y substituyendo -3 en lugar de m, tendrémos la Potencia $(a+b)^{-3} = \frac{1}{(a+b)^3}$. Y como qualquier Fraccion propria se puede exprimir por este Binomio $1-x$, y toda Fraccion impropria por $x-1$, siendo en el primer caso $x =$ à la diferencia de la tal Fraccion à la unidad (assi si la Fraccion que se levanta à Potencia es $\frac{1}{3}$, será $x = \frac{2}{3}$, pues $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$) y en el segundo $x =$ à la suma de la unidad, y de la Fraccion (por exemplo, si lo que se levanta es $\frac{4}{3}$, será $x = \frac{7}{3}$; porque $x - 1 = \frac{4}{3}$, $x = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$) reduciendo las Fracciones proprias, ò improprias à estas expressiones *Binomias*, por el methodo precedente se podrán levantar à qualquier Potencia.

Assi levantando $\frac{2}{5}$ à Cubo, por este methodo, tendrémos $\frac{2}{5} = 0.4 = 1 - 0.6$ (por ser $x = 0.6$, y $\frac{2}{5})^3$ $(= \frac{8}{125}) = 0.4^3 = (1 - 0.6)^3 = (1-x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = 1 - 1.8 +$

1.08

$1.08 - 0.216 = 0.064 = 0.4 \times 0.4 \times 0.4$.

De la miſma ſuerte ſi la quantidad Mixta, ò Fraccion impropria $\frac{4}{3}$ $(= 1\frac{1}{3})$ ſe quiere levantar à Cubo, por eſte methodo, ſerá $x = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$, $x - 1 = \frac{7}{3} - 1$, y $\frac{4}{3})^3 = (\frac{7}{3} - 1)^3 = (x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 12\frac{19}{27} - 16\frac{1}{3} + 7 - 1 = 2\frac{10}{27} = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{64}{27}$.

Eſte methodo ſobredicho de levantar las Fracciones, ſean proprias, ſean improprias, ò las quantidades Mixtas, reducidas à Fracciones, ſolo es conducente en algun caſo, pues lo comun, y mas expedito es multiplicar las Fracciones por sí miſmas las veces que ſe requiera.

222 De lo dicho haſta aquí, para levantar los Binomios à qualeſquiera Potencias, ſale la Regla general. *Para encontrar los terminos de la Potencia, buſqueſe primero la Série de las Potencias de la primera parte del Binomio, comenzando de la Potencia cuyo Exponente ſea igual al Exponente de la Potencia buſcada del Binomio, haſta la que tenga por Exponente* 0. *Buſqueſe tambien la Série de las Potencias de la ſegunda parte, deſde el Exponente* 0 *haſta la de el Exponente igual al de la Potencia que ſe buſca del Binomio. Pueſtas la una baxo la otra, multipliquenſe los terminos reſpectivos entre sí, y los productos ſerán los terminos de la Potencia del* Binomio. *Para encontrar los Coeficientes de cada termino, multipliqueſe el Coeficiente del termi-*

termino antecedente por el Exponente de la Potencia de la primera parte del Binomio, que en él ſe encuentre, y dividiendo [illegible]e producto por el numero que indica el orden del tal termino, el Quociente ſerá el Coeficiente del termino que ſe ſigue. Juntenſe los Coeficientes à ſus reſpectivos terminos, y la ſuma total ſerá la Potencia que ſe buſca. Por poca practica que ſe tenga, ſe hace eſta operacion toda de una vez.

223 Para levantar un *Trinomio*, un *Quadrinomio*, *&c.* à qualquier Potencia, ſe ha de reducir antes à una expreſſion binomia, *ſubſtituyendo en lugar de todos los terminos, excepto el primero, una quantidad, que tendrá el lugar de la ſegunda parte del Binomio.* Levantando eſte Binomio à la Potencia que ſe buſca, deſpues en lugar de la quantidad que he ſubſtituido, y ſus Potencias, poniendo los otros terminos, y ſus Potencias, tendré la Potencia del Trinomio, del Quadrinomio, &c.

Por exemplo hayaſe de levantar el Trinomio $a+b+c$ à la quarta Potencia, ſubſtituyo en lugar de $b+c$ eſta otra quantidad d, y ſerá $a+b+c=$ [illegible]$+d$; levanto eſte Binomio à la quarta Potencia, y tengo $(a+d)^4 = a^4 + 4a^3d + 6a^2d^2 + 4ad^3 + d^4$. Pues en lugar de d en el ſegundo termino, pongo ſu principal, y ſerá eſte ſegundo termino $4a^3(b+c) = 4a^3b + 4a^3c$. En el tercero en lugar de d^2 pongo $(b+c)^2$ *&c.* aſſi en los demás terminos.

CA-

CAPITULO XII.

De la Extraccion de Raices de quantidades Algebraicas.

ARTICULO PRIMERO.

De la Extraccion de Raices de quantidades Algebraicas Simples.

224 ASsi como para la *elevacion* multiplicamos una quantidad muchas veces por sí misma, y por sus productos, formando por estas multiplicaciones las *Potencias* de la tal quantidad; assi retrocediendo por los mismos passos, dada la Potencia, por la division, que es el regresso de la multiplicacion, llegarémos à la quantidad, de cuya multiplicacion se habia formado, ò se podria formar la Potencia dada (à menos que su Raiz no sea Imaginaria, ò Incommensurable) y el encontrar esta quantidad, de cuyas multiplicaciones por sí misma, y por sus productos, la quantidad, ò Potencia dada se formaria, es lo que llamamos *sacar la Raiz de una quantidad, ò reduccion de la Potencia à su Raiz*, que es lo mismo. Para

225 Para explicar esta extraccion de Raices, pongamos una Série de Potencias formadas todas de una misma Raiz; por exemplo a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, *&c.* Todas estas Potencias se forman por multiplicacion de la Raiz a, de donde a es Raiz de todas ellas, pero es *diferente* Raiz de cada una. Respecto del Quadrado a^2 es Raiz segunda, ò *quadrada*, respecto del Cubo a^3 es Raiz *cubica*, *&c.* en general el Exponente de la Potencia, expone al mismo tiempo, *que calidad de Raiz le sea la quantidad sin el tal Exponente.* Assi el Exponente m expone, que a es la Raiz m de la Potencia a^m; pero adviertase, que aunque una quantidad sea determinada Potencia respecto de otra, que le es su proporcionada Raiz, puede no obstante ser otra especie de Potencia respecto de otra Raiz: como se ve en a^4, que es *quarta* Potencia de a, pero *segunda* de a^2. Por lo tanto qualquier quantidad será qualquier genero de Potencias respecto de diferentes otras, como puede ser qualquier genero de Raiz, y assi de qualquier quantidad se podrá sacar qualquier genero de Raices.

226 La *extraccion de Raices* muchas veces en el Calculo se hace por abreviacion, poniendo antes de la quantidad, de quien se ha de sacar la Raiz, esta señal $\surd$, que significa *Raiz de*, encima la qual se pone una cifra, ò numero, que indica la calidad de Raiz que es; por lo

tanto le es ſu Exponente. Aſſi $\sqrt[3]{a}$ ſignifica la Raiz cubica de eſta quantidad a, $\sqrt[4]{a}$ la Raiz quarta, en general $\sqrt[m]{a}$ la Raiz, que exprime la letra m.

Si la quantidad, de quien ſe ha de ſacar la Raiz, es Compueſta, ſe pone la tal quantidad entre parentheſis, ò bien con una liníta encima, poniendo antes el ſigno Radical con ſu Exponente; aſſi la Raiz quarta de $a+b$ ſerá $\sqrt[4]{(a+b)}$ ò $\sqrt[4]{a+b}$.

Si el ſigno Radical no tubieſſe particular Exponente, ſe ſobreentiende 2, y entonces la Raiz es quadrada. Aſſi $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$.

227 Algunas veces es del todo neceſſario recurrir à eſta expreſſion $\sqrt{}$, porque ni por abreviacion, ni à la larga podemos exprimir la Raiz de una quantidad de otra ſuerte. Por exemplo la Raiz quadrada de $-a$ no ſe puede exprimir de otra ſuerte que de eſta $\sqrt{-a}$, como verémos: Tampoco ſe puede exprimir de otra ſuerte exactamente la Raiz quadrada de 7, que aſſi $\sqrt{7}$, porque no hai numero alguno, ni quebrado, ni entero, que la pueda exprimir *exactamente*, eſto es, que multiplicado por sí miſmo dé por producto 7; porque, ò habia de ſer 2, ò habia de ſer 3, ò alguna Fraccion entre 2, y 3, como $2\frac{1}{4}$, $2\frac{3}{4}$, &c.

Pero

Pero no es 2, porque $2 \times 2 = 4$; no es 3, porque $3 \times 3 = 9$; no es 2, y una Fraccion, porque ninguna Fraccion, ò quantidad fraccional multiplicada una, ò muchas veces por sí misma da por producto un Entero, si ella no lo es, como se ve probando en quantas Fracciones se quiera: luego no pudiendose exprimir exactamente por Quebrados, ni Enteros, es fuerza recurrir al signo Radical. Y semejantes Raices se llaman *Surdas*, ò *Irracionales*, por ser quantidad, que no tiene Razon racional con la unidad.

228 Para sacar pues qualquier Raiz de qualquier quantidad Simple, ò Monoma Algebraica tomese esta Regla general. *Qualquier Raiz de qualquier quantidad Simple se saca dividiendo el Exponente de la quantidad por el Exponente de la Raiz.* Assi $\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$, y en general $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, $\sqrt[s]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{ns}}$. En las quantidades Numericas tambien alguna vez se hace la misma operacion. Assi $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[3]{9^4} = 9^{\frac{4}{3}}$.

Esta Regla no tiene excepcion en quantidad alguna possible, pero si en las Raices *impossibles*, ò *imaginarias*, porque no es lo mismo $\sqrt{-a^2}$, que $-a^{\frac{2}{2}}$, pues $-a^{\frac{2}{2}} = -a$, que es

quantidad posible, pero negativa, y $\surd -a^2$ es quantidad imposible; por lo tanto las Raices imposibles lo mejor es que se queden con el signo $\surd$. Respecto pues de las posibles solo necesita la Regla dada de aplicacion à varios casos.

Si la quantidad no tubiesse Exponente, se le sobreentiende 1, el qual dividido por el Exponente de la Raiz, será el Exponente de la quantidad Radical; de donde $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$.

229 De esta Regla se figue 1º. *Que si el Exponente de la Raiz, que se ha de sacar, es el mismo, ò igual al Exponente de la quantidad, basta para sacar la Raiz, borrarle à la quantidad su Exponente.* Asi $\sqrt[m]{a^m} = a$, porque $\sqrt[m]{a^m} = a^{\frac{m}{m}} = a^1 = a$.

2º. *Si la quantidad tubiesse factores, para sacar su Raiz se ha de dividir el Exponente de cada factor por el Exponente de la Raiz*; de donde $\sqrt[3]{bd} = b^{\frac{1}{3}} d^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[n]{b^m d^r} = b^{\frac{m}{n}} d^{\frac{1}{n}} a^{\frac{r}{n}}$.

3º. *Si la quantidad fuesse fraccional, se ha de dividir el Exponente del Numerador, y del Denominador por el Exponente de la Raiz*; asi

$$\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^2}} = \frac{a^2}{b^{\frac{2}{3}}}, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{3}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{3^{\frac{1}{n}}} = 3^{-\frac{1}{n}} a^{\frac{1}{n}}, \quad \sqrt[5]{\frac{a^2}{c^4}} = \frac{a^{0.4}}{c^{0.8}}.$$

Como

230 Como las quantidades Compueſtas, ò Polinomias para abreviar ſe levantan à Potencias, incluyendolas entre ( ), y al ultimo el Exponente de la Potencia, dexando intactos ſus Exponentes proprios (como $a^7 + b^5$ levantado à la Potencia n es $(a^7 + b^5)^n$) conſiderandolas de eſta ſuerte en cierta manera como quantidades Simples, tambien para ſacar la Raiz valdrá en ellas la Regla ſuperior de dividir el Exponente de la tal Potencia por el Exponente de la Raiz, dexando intacto quanto haya entre los parentheſis. Aſsi $\sqrt[n]{(a^7 + b^5)^m} = (a^7 + b^5)^{\frac{m}{n}}$. Y por quanto $a^7 + b^5 = (a^7 + b^5)^1$, ſerá $\sqrt[n]{a^7 + b^5} = (a^7 + b^5)^{\frac{1}{n}}$.

231 El principio de quanto hemos dicho ſe funda en que una quantidad ſe levanta à Potencias, multiplicando ſu Exponente por el Exponente de la Potencia que ſe buſca: luego dada la Potencia, dividiendo ſu Exponente por el Exponente de la Raiz, ſe deshará lo que ſe habia hecho, y quedará la Raiz. Para levantar a^1 à Quadrado, multiplico el Exponente de a^1 por 2, y tengo $a^{1 \times 2} = a^2$: luego ſi eſta Potencia la quiero reducir à ſu Raiz como eſtaba, deshago lo hecho dividiendo el Exponente por 2, y tendré $a^{\frac{2}{2}} = a$.

Quan-

232 *Quando el Exponente de la Raiz, que ſe buſca, es un Diviſor exacto del Exponente de la quantidad, la Raiz ſerá una Potencia inferior de la quantidad miſma.* Aſſi $\sqrt[4]{a^{16}} = a^{\frac{16}{4}} = a^4$, que es una Potencia perfecta de *a*. Pero ſi el Exponente de la Raiz no fueſſe Diviſor exacto del de la dicha quantidad, la quantidad que fueſſe Raiz, tendrá por Exponente una Fraccion, ò quantidad fraccional propria. Aſsi porque 2 no es Diviſor exacto de 5, ni de 7, ſerá $\sqrt{a^5} = a^{\frac{5}{2}}$, $\sqrt{a^7} = a^{\frac{7}{2}}$; pero ni eſta, ni $a^{\frac{5}{2}}$ ſon Potencias perfectas de *a*, pues jamás ſe podrá multiplicar por sí miſma, ni por ſus productos, de ſuerte que llegue à ſer $a^{\frac{5}{2}}$, $a^{\frac{7}{2}}$.

Se llaman no obſtante Potencias *Imperfectas*, ò *Surdas* de *a*, y ſe hacen las operaciones con ellas de la miſma ſuerte, que con las Potencias perfectas. Se Multiplican entre sí ſumando los Exponentes, ſe Dividen quitando el Exponente del Diviſor del Exponente del Dividendo, ſe levantan à Potencias multiplicando ſus Exponentes por el Exponente de las Potencias, y ſe ſaçan ſus Raiçes dividiendo ſus Exponentes por los de las Raices.

233 En orden à los Signos *poſitivo*, ò *negativo*, que deben tener las Raiçes, ſe puede inferir de lo que hemos dicho en la Elevaçion de las quantidades, es à ſaber, *que toda Po-*

Potencia de Signo positivo puede tener las Raices cuyo Exponente es par, ò positivas, ò negativas. Pues assi $+a \times +a$, como $-a \times -a = a^2$; de donde $\sqrt{a^2}$ puede ser $+a$, y $-a$: luego la Raiz quadrada, biquadrada, sexta, octava, &c. de una quantidad positiva, puede ser, ò *positiva*, ò *negativa.*

Al contrario, *si la quantidad es negativa, ninguna Raiz de Exponente par será positiva, ni negativa*; porque no hai quantidad alguna, ni positiva, ni negativa, que multiplicada por sí misma un numero *par* de veces dé un producto negativo, pues ni $-a$, ni $+a$ multiplicado por sí mismo da $-a^2$: ni $-a^2$, ni $+a^2$ multiplicado por sí mismo da $-a^4$. Por consiguiente toda Raiz 2^a. 4^a. 6^a. &c. de una quantidad negativa, como $\sqrt{-a}$, no pudiendo ser ni quantidad positiva, ni negativa, debe ser una quantidad *imposible*, ò *imaginaria*, y estas son las que se llaman *Raices imposibles*, ò *imaginarias.*

ARTICULO II.

De la Extraccion de Raices de las quantidades Algebraicas Compuestas.

234 SI atendemos à la formacion de Potencias, repararemos 1º. *Que nin-*

ninguna quantidad Simple, multiplicada por sí miſma, da por producto una quantidad Compueſta; por conſiguiente la Raiz de una quantidad Compueſta no puede ſer una quantidad Simple, ò Monoma, ſino que ha de ſer neceſſariamente una quantidad Compueſta, ò de muchos terminos.

2º. *Que* ſi la Potencia eſtá bien ordenada ſegun la quantidad de mayor dimenſion, como hemos dicho en la Diviſion, *el primer termino ſerá la Potencia ſuperior de la primera parte de la Raiz, y el ſegundo ſerá un producto de una Potencia* (*immediata inferior à la primera*) *de la primera parte de la Raiz, y de la ſegunda, multiplicado dicho producto por el Exponente del termino antecedente.* Aſsi en la Potencia 6ª. de $a + b$, el primer termino es a^6, que es la ſuperior Potencia de la primera parte de la Raiz (a), y el ſegundo $+ 6a^5b$, que es un producto de la Potencia immediata inferior (a^5) de la primera parte de la Raiz, por la ſegunda parte (b) multiplicado por el Exponente (6) del termino antecedente.

235 De donde ſacamos una Regla breve, y general para ſacar toda eſpecie de Raices de quantidades Compueſtas, aſsi Algebraicas, como Numericas, haciendo para eſtas una leve preparacion, como dirémos en ſu lugar.

Regla

Regla general para ſacar qualquier eſpecie de Raices de quantidades Cõpueſtas.

Regla. *Diſponganſe los terminos ſegun la mayor dimenſion de alguna de ſus quantidades, ò letras, poniendo por primero aquel en que hubieſſe una letra de mayor dimenſion, y por ſegundo aquel en que dicha letra tubieſſe la dimenſion immediata inferior. Saqueſe la Raiz que ſe buſca de eſte primer termino, y eſta ſerá el primer miembro, ò termino de la Raiz buſcada.*

Para encontrar *el ſegundo: Levanteſe eſte primer termino encontrado à una Potencia de Exponente inferior de una unidad al Exponente de la Raiz que ſe buſca, multipliqueſe eſta Potencia por el miſmo Exponente de la Raiz, y ſu producto ſerá un Diviſor, por el qual dividiendo el ſegundo termino, el quociente ſerá el ſegundo termino de la Raiz.*

Para ver ſi la Raiz tiene mas terminos, levanteſe *toda la Raiz encontrada à una Potencia de la miſma denominacion, que el Exponente de la Raiz que ſe buſca, eſto es, à Quadrado ſi ſe buſca la Raiz quadrada, à Cubo ſi ſe buſca la cubica; reſteſe eſte producto de la quantidad dada, cuya Raiz ſe buſca. Si no hai reſta alguna, ſe tienen ya todos los terminos de la Raiz,*

y

y ſe acabó la operacion. Si queda algo, ſeñal es, que la Raiz tiene algun tercer termino, y hagaſe para encontrarlo, la miſma operacion, que ſe ha hecho para el ſegundo, eſto es, *levanteſe toda la Raiz ya encontrada à una Potencia de Exponente inferior de una unidad al Exponente de la Raiz que ſe buſca, multipliqueſe eſta Potencia por el Exponente de la Raiz, y por eſte producto dividaſe la reſta, el quociente ſerá la tercera parte de la Raiz, y aſsi para los demás terminos, ſi los hubieſſe.*

236 La aplicacion à cada eſpecie particular de Raices aclarará eſta Regla.

Aplicacion de la Regla general à la Extraccion de Raices quadradas.

Buſqueſe la *Raiz quadrada* de $a^2 + 2ab + b^2$. Ponganſe los terminos como en el Exemplo. Tomeſe la Raiz quadrada del primer termino a^2, ſe encontrará ſer $a^{\frac{2}{2}} = a$, pongaſe pues à parte, y eſta ſerá la primera parte, ò termino de la Raiz.

Para encontrar el ſegundo: levanteſe eſta parte encontrada à una Potencia de Exponente inferior de una unidad al Exponente de la Raiz que ſe buſca. Pero como ſe buſca la *Raiz quadrada*, cuyo Exponente es 2, ſe habrá de levantar à la Potencia $2 - 1 = 1$, eſto es, à la pri-

primera Potencia, que es la immediata à la ſegunda.

Aſsi ſerá $a^1 = a$, multiplicando eſta Potencia por el Exponente de la Raiz quadrada (2), tendré $2a$, que es *ſu duplo*; dividiendo por eſte el ſegundo termino $2ab$, tendrémos $\frac{2ab}{2a} = b$, pues eſte ſerá el ſegundo miembro de la Raiz, que añadido al primero ſerá $a + b$. Para ver ſi la Raiz tiene algun otro termino, levanteſe $a + b$ à Quadrado, y tendrémos $a^2 + 2ab + b^2$, que reſtandolo de la Potencia dada, no da reſta alguna, pues $a + b$ es la Raiz quadrada de la quantidad dada.

EXEMPLO.

Quantidad dada. *Raiz.*

$a^2 + 2ab + b^2$ $(a + b)$

Diviſor $2a)$ $2ab$

Quadr. $(a + b) \times (a + b) =$ $a^2 + 2ab + b^2$

Reſta 0

237 Dada eſta quantidad $c^2 + 2cd + 2ce + 2de + d^2 + e^2$ para ſacar ſu Raiz quadrada, haciendoſe ſemejante operacion, queda por Reſta $2ce + 2de + e^2$, pues es ſeñal, que la Raiz tiene algun tercer termino. Para encontrarlo, levanteſe la parte ya encontrada de la Raiz $(c + d)$ à la Potencia $2 - 1$, y multiplicandola por el Exponente de la Raiz que ſe buſ-

buſca, tendrémos $(c+d)^{2-1=1} \times 2 = 2c+2d$, por el qual dividaſe dicha Reſta, el quociente ſerá e, el qual añadido à la Raiz encontrada $c+d$, dará $c+d+c$. Para ver ſi todavia hai algun otro termino, quadreſe la Raiz, y el Quadrado quiteſe de la quantidad dada, y no quedando reſta alguna, ſerá $c+d+e$ la Raiz quadrada de la quantidad dada.

EXEMPLO.

Quantidad dada. *Raiz.*

$g^8-2xg^5+2xg^4-2x^2g+x^2g^2+x^2$ $(g^4-xg+x$

$2g^4)-2xg^5$

$g^8-2xg^5+x^2g^2$

$2g^4-2xg)\ 2xg^4-2x^2g+x^2$

$g^8-2xg^5+2xg^4-2x^2g+x^2g^2+x^2$

0

EXEMPLO.

Quantidad dada. *Raiz.*

$\frac{pp}{qq}-\frac{2pz}{qn}+\frac{zz}{nn}$ $\left(\frac{p}{q}-\frac{z}{n}\right.$

$\left.\frac{2p}{q}\right)\ -\frac{2pz}{qn}$

$\frac{pp}{qq}-\frac{2pz}{qn}+\frac{zz}{nn}$

0

Apli-

Aplicacion de la Regla general à la Extraccion de Raices cubicas.

238 Para encontrar la *Raiz cubica* de eſta quantidad $12hx^2 - 8x^3 + h^3 - 6h^2x$ diſpongan ſe los terminos ſegun las dimenſiones de h, como eſtá en el Exemplo. Saqueſe la Raiz cubica de h^3, que es h, pongaſe à parte. Como la Raiz cubica tiene por Exponente 3, ſe habrá de levantar la parte encontrada h à la Potencia $3 - 1 = 2$, eſto es, à Quadrado (h^2); multiplicandolo por el Exponente de la Raiz (3), tendrémos $3h^2$ por Diviſor del ſegundo termino $- 6h^2x$, por quien dividiendo eſte, da por quociente, ò ſegunda parte de la Raiz $- 2x$. Para ver ſi hai otro termino, levanteſe $h - 2x$ à Cubo, ſe encontrará $h^3 - 6h^2x + 12hx^2 - 8x^3$, que reſtandolo de la quantidad dada, no dará reſiduo alguno, pues es ſeñal, que ſu Raiz cubica es $h - 2x$, como ſe ve en el ſiguiente

EXEMPLO.

Quantidad dada. *Raiz.*

$h^3 - 6h^2x + 12hx^2 - 8x^3$ ($h - 2x$

Diviſor $3h^2$) $- 6h^2x$

Cubo de $h - 2x = h^3 - 6h^2x + 12hx^2 - 8x^3$

o

De la miſma ſuerte ſe ſaça la Raiz $4^a.5^a.6^a.$ &c.

Al-

239 Algunas veces ſucede, que las quantidades dadas ſon de tal naturaleza, que hechas, y repetidas todas las operaciones preſcritas, ſiempre hai algun reſiduo, y entonces es ſeñal, que la tal Raiz no ſe puede exprimir exactamente con numero alguno finito de terminos, y ſerá por conſiguiente una Série infinita tanto mas exacta, quanto mas ſe vaya proſiguiendo. Aſsi la Raiz quadrada de $a^2 + x^2$ ſe encuentra por las leyes dadas ſer $a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$, &c.

240 Pero como para ſacar qualquiera Raiz de qualquier quantidad ſe divide el Exponente de la Potencia por el de la Raiz, ſerá lo miſmo extraher la Raiz (qualquiera) de una quantidad, que levantar la tal quantidad à Potencia de Exponente igual à la Fraccion, que reſulta dividiendo el Exponente de la Potencia por el de la Raiz, que ſe quiere extraher.

Mas como qualquier quantidad Compueſta ès un Binomio, Trinomio, ò Quadrinomio, &c. y qualquiera de eſtos ſe puede reducir al Binomio comun $a + b$, exprimiendo el primer termino por a, y la ſuma de los demás por b, ſerá ſu Raiz quadrada $(a+b)^{\frac{1}{2}}$, cubica $(a+b)^{\frac{1}{3}}$; luego la Formula general de levantar un Binomio à qualquier Potencia, podrá tambien ſervir para ſacar qualquier Raiz de qualquier quan-

quantidad Polinomia, haciendo el Exponente m igual à la Fraccion, que es Exponente de la Raiz.

Aſsi ſi $m = \frac{1}{2}$, ſerá $(a+b)^m = (a+b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(a+b)}$; luego ſubſtituyendo a por el primer termino de la quantidad dada, b por la ſuma de los demás, m por el Exponente de la Raiz, ſerá $(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b$, &c. la Formula, que exprimirá la Raiz, ſubſtituyendo en lugar de a, b, m los terminos que le correſponden.

Eſte methodo es expeditiſsimo, en particular para extraher Raices de quantidades Binomias. Aſsi la Raiz quadrada de $a^2 + x^2$ facilmente ſe encuentra por eſte methodo (haciendo $\sqrt{(a^2+x^2)} = (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$, $m = \frac{1}{2}$) la miſma que arriba $a + \frac{a^{-1}x^2}{2} - \frac{a^{-3}x^4}{8}$, &c.

Pero ſe ha de advertir, que ninguna Raiz ſe puede encontrar exactamente por eſte methodo, à no ſer, que la Fraccion que exprime m ſea un Entero. Aſsi no ſe podrá encontrar exactamente la Raiz quadrada de $a^2 + 2ab + b^2 = (a^2 + 2ab + b^2)^{\frac{1}{2}}$; pero sí la de $(a+b)^2$, que es $(a+b)^{\frac{2}{2}} = a+b$; pues en eſte caſo $m = 1$.

CAPI-

CAPITULO XIII.

De la Extraccion de Raices de las quantidades Numericas.

ARTICULO PRIMERO.

Regla general para la Extraccion de qualquier genero de Raices de quantidades Numericas.

241 LA Regla para la Extraccion de Raices de quantidades Numericas es la miſma que la de quantidades Algebraicas Compueſtas. Solo ſe diferencian, en que las quantidades Algebraicas Compueſtas tienen ſus partes ſeparadas por los Signos +, ò —, lo que no tienen comunmente los Numeros; pero eſta ſeparacion ſe ſuple de otra ſuerte.

Para ſacar qualquier Raiz de qualquier quantidad Numerica, *ſe ha de preparar la quantidad dada, ſeparando ſus cifras en periodos, que conſte cada uno de tanto numero de figuras, como unidades contiene el Exponente de la Raiz que ſe buſca, comenzando eſta reparticion en perio-*

periodos desde la cifra de las Unidades ácia la izquierda en las cifras de Enteros, y ácia la derecha en las figuras de Decimales.

242 Esta Regla muestra, que para sacar la Raiz *quādrada*, los periodos han de tener *dos* figuras, por ser 2 el Exponente de dicha Raiz, y por la misma razon para sacar la Raiz *cubica*, los periodos han de tener *tres* figuras, excepto el ultimo ácia la izquierda, que en la Raiz quadrada puede tener menos que dos, y en la cubica menos que tres, &c. Hecha esta separacion de periodos, *habrá en la Raiz tantas figuras, quanto es el numero de periodos, en que la quantidad se ha repartido*: lo que es grande ventaja en la Extraccion de Raices Numericas sobre las Algebraicas; pues en estas se necesita de la operacion, para saber de quantos terminos la Raiz conste, quando en las Numericas solo la reparticion en periodos lo demuestra.

Tengansе à mas de esto presentes las Potencias de las Raices simples, esto es, que se exprimen por solo un numero, ò figura, las que se ven en esta Tabla.

Raices	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubos	1	8	27	64	125	216	343	512	729

243 Preſupueſto todo eſto: como la Extraccion de Raices es un genero de Diviſion, la operacion ſe comienza por la izquierda. Para ſacar pues toda eſpecie de Raices:

Regla general. *Saqueſe la Raiz, que ſe buſca, de la mayor Potencia de eſſe genero, que eſté comprehendida en el primer periodo, y eſta Raiz ſerá la primera figura de que conſte la Raiz de toda la quantidad.*

Levanteſe la Raiz encontrada à ſu Potencia, y eſte producto, ò Potencia reſteſe del primer periodo. A la reſta (ſi hai alguna) *junteſele la primera figura del ſegundo periodo, lo qual todo ſerá un nuevo Dividendo. Y para encontrarle un Diviſor correſpondiente, que dé por quociente la ſegunda parte de la Raiz, levanteſe la parte encontrada de la Raiz à una Potencia de Exponente inferior de una unidad al Exponente de la Raiz que ſe buſca; multipliqueſe eſta Potencia por el Exponente de la Raiz, y el producto ſerá un Diviſor, por el qual dividiendo lo que ha quedado del primer periodo, y la primera cifra del ſegundo* (menoſpreciando las demás cifras de eſte) *el quociente ſerá la ſegunda parte de la Raiz.*

Para ver ſi eſta Raiz es exacta, ò queda algo, *levanteſe toda la Raiz encontrada à Potencia del miſmo Exponente, que el de la Raiz que ſe buſca.* Si eſta Potencia es *menor*, ò *igual* à los dos periodos, la operacion eſtá bien hecha;

cha; ſi es *mayor, diſminuyaſe la ultima parte encontrada de una unidad, haſta que la Potencia de todo lo ya encontrado ſea igual, ò inferior à los dos periodos. Reſteſe eſta Potencia de los dos periodos juntos, ſi no queda coſa, ni periodo alguno, la operacion eſtá concluida.*

Si queda algo, y hai mas periodos, *ſirvaſe de toda la parte ya encontrada* para hallar *la tercera, la quarta, la quinta figura, &c.* de la miſma ſuerte que ſe ha valido de la primera para encontrar la ſegunda. La aplicacion à la Extraccion de Raiz Quadrada, y Cubica manifeſtará el uſo, y univerſalidad de eſta Regla.

ARTICULO II.

Aplicacion de la Regla general à la Extraccion de Raices Quadradas.

244 HAyaſe de ſacar la *Raiz Quadrada* de eſta quantidad 1764. Siguiendo la Regla general precedente, dividaſe en periodos como ſe verá en el Exemplo. La Raiz Quadrada del primer periodo 17 es 4, porque el mayor Quadrado, que eſtá comprehendido en el primer periodo es 16, cuya Raiz es 4, que ſe pone à parte, por ſer la primera figura de que conſta la Raiz que ſe buſca; levanteſe la Raiz encontrada (4) à Quadrado,

drado, y ſerá $4 \times 4 = 16$, que reſtandolo del primer periodo 17 queda 1, à quien juntando la primera figura del ſegundo periodo (64) tendrémos el *nuevo Dividendo* 16.

Para encontrarle à eſte nuevo Dividendo Diviſor correſpondiente, que dé por quociente la ſegunda parte de la Raiz, *levanteſe la parte encontrada à Potencia de Exponente inferior de una unidad al Exponente de la Raiz*, eſto es, $4^{2-1} = 4$, que multiplicandolo por el Exponente de la Raiz ſerá $2 \times 4 = 8$ el Diviſor, por el qual dividiendo el nuevo Dividendo 16, el quociente ſerá = 2, que juntandolo à la parte ya encontrada (4), ſerá la Raiz = 42.

Para ver ſi eſta Raiz es exacta, ò ſi hai algun reſiduo, levanteſe 42 à Potencia de Exponente igual al de la Raiz que buſcamos, que en eſte caſo es à *Quadrado*, y tendrémos $42 \times 42 = 1764$, que reſtado de los dos periodos, no da reſiduo alguno; pues ſeñal es, que la Raiz es exacta, y la quantidad dada Quadrado perfecto, y con eſto queda concluida la operacion.

EXEMPLO.

Raiz.

17, 64 (42

Quadrado de $4 = 4 \times 4 = 16$

Diviſor $4 \times 2 = 8)\ 1\ 6$

Quadrado de $42 = 42 \times 42 = 17\ 64$

0

Sa-

245 Sacando la Raiz Quadrada de esta quantidad 180638, encontrados los dos primeros terminos (42) por operaciones semejantes à las precedentes, resta de los dos primeros periodos 42, que añadido à la primera figura del tercer periodo 3, forma un nuevo Dividendo 423, el qual dividido por 2 x 42 = 84 da por quociente 5, que añadido al lado de 42, forma la Raiz 425. Para ver si esta Raiz es exacta, ò hai algun otro termino, quadrese esta Raiz encontrada, y tendrémos 425 x 425 = 180625, que quitado de los tres periodos, resta 13; de donde se saca, que la quantidad dada no es Quadrado perfecto, y que el Quadrado mayor, que ella contiene es 180625, cuya Raiz es 425.

EXEMPLO.

		Raiz.
	18, 06, 38	(425
Quadrado 4 x 4 =	16	
1r. *Divisor* 2 x 4 = 8)	2 0	
Quadrado 42 x 42 =	17 64	
Resta de los dos periodos	42 3	
2o. *Divisor* 2 x 42 = 84)		
Quadrado 425 x 425 =	18 06 25	
Resta de los tres periodos	13 00	

246 Si à la ultima resta se le añaden periodos de ceros, prosiguiendo la operacion, se

ſe ſacará la Raiz por aproximacion, lo que es general en toda eſpecie de Raices.

247 Algunos (y es lo comun) encontrada la primera parte de la Raiz, y reſtado ſu Quadrado del primer periodo, junta la reſta con el ſegundo periodo, *la dividen* (deſpreciando la ultima figura) *por el duplo de la parte de la Raiz encontrada, ſu quociente* (2) *lo multiplican por sí miſmo, y por el Diviſor* (8), *el producto* (164) *lo reſtan del Dividendo* (206). *A la reſta* (42) *junta con el periodo ſiguiente* 38, es à ſaber, 4238, *la dividen por el duplo de la Raiz encontrada* ($2 \times 42 = 84$), *el quociente* (5) *lo multiplican por sí miſmo, y por el Diviſor* (84), *ſu producto* (4225) *lo reſtan del ultimo Dividendo* (4238) y eſcriben las quantidades como ſe ve en los ſiguientes

EXEMPLOS.

Raiz.	*Raiz.*
18,06,38 (425	1,44.60,0 (12.0249
16	1
206	44
82	22
164	44
4238	6000
845	2402
4225	4804
13.00	11 9600

La

La ſubſtancia de una Regla, y de otra es la miſma; pero el ſer la Regla dada univerſal para toda eſpecie de Raices, aſsi Numericas, como Algebraicas, Quadradas, Cubicas, &c. el no haber de dar Regla particular para cada una, y el manifeſtarſe por eſte methodo mejor (à mi parecer) los fundamentos de la Extraccion de Raices, me la hace proponer en los terminos ſobredichos: aunque por lo particular de la Raiz quadrada eſte comun methodo es mas expedito, y es bueno ſeguirlo en la practica.

ARTICULO III.

Aplicacion de la Regla general à la Extraccion de Raices cubicas.

248 HAyaſe de ſacar la *Raiz cubica* de eſta quantidad 19152. Como la Raiz cubica tiene por Exponente 3, *cada periodo en que ſe ha de ſeparar la quantidad*, conſtará de tres figuras, y aſsi ſe habrá de poner 19,152; por conſiguiente habiendo dos periodos, la Raiz cubica de la quantidad dada ſe exprimirá por dos cifras.

Empezando pues la operacion: El mayor Cubo contenido en 19 es 8, cuya Raiz cubica es 2, que pongo à parte, y es la primera cifra de

de que conſta la Raiz, y ſu Cubo 8, reſtandolo del primer periodo 19, quedan 11, à quien juntando la primera figura del periodo ſiguiente, ſerá el nuevo Dividendo 111.

Para encontrar Diviſor à eſte nuevo Dividendo (111), que dé la ſegunda parte de la Raiz, *levanteſe la Raiz encontrada* (2) *à una Potencia de Exponente inferior de una unidad al Exponente de la Raiz que buſcamos, y eſta Potencia multipliqueſe por el Exponente de la Raiz.* Como la Raiz que ſe buſca es cubica, cuyo Exponente es 3, ſe habrá de levantar la parte encontrada (2) à la Potencia de Exponente $3 - 1 = 2$, eſto es, à *Quadrado*, y ſerá $2 \times 2 = 4$, que multiplicado por el Exponente de la Raiz da $3 \times 4 = 12$, por el qual dividiendo 111, tendrémos por quociente 8, que juntandolo à la parte ya encontrada 2, ſerá 28. Para ver ſi eſta Raiz es exacta, cubaſe 28, y ſerá $28 \times 28 \times 28 = 21952$; pero reparo, que eſte Cubo es mayor que la quantidad de los dos periodos, y aſſi ſe habrá de diſminuir de una unidad la ultima parte encontrada 8, y ſerá 27, cuyo Cubo 19683 aun es mayor, que los dos periodos, por lo que diſminuyaſe el 7 de una unidad, y tendrémos por Raiz 26, cuyo Cubo $26 \times 26 \times 26 = 17576$ reſtandolo de los dos primeros periodos, quedan 1576.

249 De donde ſe infiere, que la quantidad dada no es Cubo perfecto, pero que la Raiz

Raiz del Cubo mayor que ella contiene, es 26. No obſtante, ſi ſe añadieſſen periodos de ceros à la ultima reſta, ſe ſacaria la Raiz de la quantidad dada por aproximacion, que ſería 26 + la Fraccion Decimal, que iria ſaliendo con ſemejantes operaciones. De la miſma ſuerte ſe encuentra, que la $\sqrt[3]{}$ 12812904 es 234.

EXEMPLOS.

	Raiz.		*Raiz.*
	19,152 (26		28.934,5 (3.07
	8		27
3 × 4 = 12)	11 1	2700)	1 9345
Cubo de 26 =	17 576		28.9344 43
Reſta	1 576.	*Reſta*	57

Raiz.

12,812,904 (234

2 × 2 × 2 = 8

3 × 4 = 12) 48

Cubo de 23 = 12 167

3 × 23 × 23 = 1587) 6459

Cubo de 234 = 12 812 904

0

250 Si la quantidad Numerica, de quien ſe ha de ſacar la Raiz, fueſſe una Fraccion, ſu Raiz ſe ha de ſacar del Numerador, y Denominador. Aſſi $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$; pero como $\frac{2}{3} = \frac{6}{9} = \frac{1}{9}\sqrt{(4 \times 9^{2-1})}$, y en general, por las Reglas que

def-

despues darémos, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}$, se saca de ahí una Regla expeditissima para sacar qualquier genero de Raices de qualquier Fraccion comun, y es

Regla. *Multipliquese el Numerador por el Denominador elevado à una Potencia de Exponente inferior de una unidad al Exponente de la Raiz que se busca, saquese la misma Raiz de este producto, la qual dividida por el Denominador de la Fraccion dada, será la Raiz de la Fraccion, que se pretende.*

Assi $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{(2\times 3^{2-1})} = \frac{1}{3}\sqrt{6} = \frac{2.449}{3} = 0.816$,

$\sqrt[3]{\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}\sqrt[3]{5\times 6\times 6} = \frac{1}{6}\sqrt[3]{180} = \frac{5.64}{6} = 0.94$.

Si la quantidad dada, de quien se ha de sacar la Raiz, fuesse quantidad Mixta de Enteros, y Quebrados, ò bien se reduce todo à una Fraccion impropria, ò bien (y es lo mejor) la parte fraccional se reduce à Decimales; y assi de la quantidad de Enteros, y Decimales se saca la Raiz como si todo fuessen Enteros; advirtiendo, que en la Raiz habrá tantas figuras de Enteros, quantos periodos de Enteros hubiesse en la quantidad dada. Si la quantidad dada toda fuesse Decimales, sacandole la Raiz como si fuesse de Enteros (como se debe) todas las cifras de la Raiz serán tam-

tambien Decimales: assi la Raiz quadrada de 0.4 es 0.632. Si las primeras figuras fuessen periodos de ceros, saqueſe la Raiz de lo demás como si fuessen Enteros, y por cada periodo de ceros, de los que preceden, pongase en la Raiz un cero antes de las cifras significativas. Assi para sacar la Raiz quadrada de .0023456, por preceder un periodo de ceros, saco la Raiz de 23,45,6, que será 4843, à quien añadiendo un cero al principio, tendrémos por su Raiz .04843.

CAPITULO XIV.

Del Calculo de las quantidades Radicales.

251 SI en el Algebra no se usara tanto de abreviacion, sería ocioso este Capitulo; porque supuesto que la Raiz de una Potencia se saca *dividiendo el Exponente de la Potencia por el de la Raiz*, quedando la Raiz de esta suerte una Potencia perfecta, ò imperfecta de la quantidad, si se hiciesse siempre assi esta Extraccion, el Calculo de las Raices, ò quantidades Radicales, sería el mismo que de Potencias Perfectas, ò Imperfectas.

Pero para abreviar se sacan las Raices de las quantidades, poniendo antes de la Potencia el

el ſigno Radical $\surd$, y ſobre él el *Exponente*, que indica la calidad de Raiz; por conſiguiente para las operaciones con las Raices expreſſadas de eſta ſuerte, ſon meneſter Reglas particulares, pero que todas ſe fundan en que *el Exponente del ſigno Radical en las Raices expreſſadas con él equivale al Denominador del Exponente de las Raices pueſtas à forma de Potencias*; de donde $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

252 Toda quantidad ſe puede exprimir por expreſſion acompañada de eſte ſigno $\surd$ con qualquier Exponente, porque qualquier quantidad es Raiz de ſus Potencias, con que *elevando la quantidad à Potencia, y poniendola con ſigno Radical de la miſma denominacion, ò Exponente, que la tal Potencia, la quantidad ſe queda la miſma que ſi no fueſſe elevada à Potencia.* Aſſi $a = \surd a^2 = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[m]{a^m}$, porque $\sqrt[m]{a^m} = a^{\frac{m}{m}} = a$.

253 Las Raices unas ſon *Imaginarias*, ò *Impoſsibles*, porque en realidad ſon quantidades en ſi impoſſibles: tales ſon *las Raices de Exponente par de quantidades negativas*, como $\sqrt[2]{-a}$, $\sqrt[n]{-a^m}$, ſignificando n numero *par*.

Otras ſon Raices *Racionales*, ò lo que es lo miſmo ſon quantidades Racionales, que es de-

decir, que *ſu Razon con la unidad ſe puede exprimir exactamente por un numero finito de Terminos, Enteros, Quebrados, ò Mixtos*; pues todo numero por sí miſmo exprime la Razon, que tiene à la unidad. Aſſi la Razon de 4 à 1 es $=\frac{4}{1}=4$; de aquí es, *que toda Raiz que ſe pueda exprimir exactamente por numero Entero, Quebrado, ò Mixto, es Racional*, y por tener una comun medida con la unidad, ſe llama abſolutamente *Commenſurable* con ella.

254 Otras Raices ſon *Irracionales*, ò *Surdas*, que es lo miſmo, por ſer en sí quantidades, *cuya Razon con la unidad no ſe puede exprimir por finito numero de Terminos, Enteros, Quebrados, ò Mixtos.* Por exemplo $\sqrt{2}$ es una quantidad, ò Raiz Irracional, pues ni es 1, ni 1 + una Fraccion, *que podamos exprimir con numero finito de Terminos*, aunque ſe pueda ſacar dicha Raiz por *aproximacion*, pero jamás *exactamente.* Aſſi $\sqrt{2}=1.414$, &c. y por no tener ſemejantes quantidades alguna comun medida con la unidad, ſe llaman abſolutamente *Incommenſurables* con ella.

Son no obſtante *Commenſurables con ella en Potencia*, ſi ſus Potencias ſon numeros Racionales. Pueden tambien dos Raices *Incommenſurables con la unidad*, ſer *Commenſurables entre sí*, y tener entre sí una Razon Racional: Tales ſon $\sqrt{8}$, y $\sqrt{2}$; porque $\sqrt{8}=\sqrt{(2\times 4)}=2\sqrt{2}$, y $2\sqrt{2}$ es à $\sqrt{2}$ como 2 à 1: como ſe

ve en esta analogia $2\sqrt{2} : \sqrt{2} :: 2 : \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$.

255 La Raiz de un Entero debe ser, *ò un Entero, ò un Incommensurable*, pues ninguna Fraccion pura, ni numero Mixto multiplicado por sí mismo, ni por sus productos jamás da un Entero.

De ahí es, *que la Raiz Quadrada de qualquier numero Entero, excepto de* 1, 4, 9, 16, 25, &c. que son los Quadrados de los numeros naturales 1, 2, 3, 4, &c. *es Incommensurable*, como tambien *son Incommensurables qualesquiera Raices de qualquier Entero, excepto de las Potencias de los numeros naturales.*

Las Raices de quantidades Algebraicas son Commensurables, ò Incommensurables con la unidad, segun sean las quantidades por quienes las letras suponen. Assi $\sqrt{cd}$, si $c = 4$, $d = 9$, será $cd = 36$, $\sqrt{cd} = \sqrt{36} = 6$, que es quantidad Racional, y Commensurable. Si $c = 3$, $d = 7$, será $cd = 21$, $\sqrt{cd} = \sqrt{21}$, que es Incommensurable.

Reduccion de quantidades Radicales.

256 Con las quantidades Radicales (sean Racionales, ò Irracionales) se pueden hacer las operaciones de la Arithmetica; pero para esto comunmente se preparan, reduciendolas

à

à Raices de un miſmo Exponente, aſſi como para hacer las dichas operaciones con las Fracciones Comunes, ſe reducen eſtas à un miſmo Denominador.

PROBLEMA I. *Reducir las quantidades Radicales de diferente denominacion, ò Exponente Radical à otras, que tengan la miſma denominacion, ò Exponente, reteniendo el miſmo valor, que cada una en particular tenia antes.*

Regla. *Multipliquenſe mutuamente entrambos Exponentes de ſigno Radical, y Potencia de una quantidad por el Exponente del ſigno Radical de la otra, y quedarán entrambas quantidades Radicales con una miſma denominacion, ò ſerán un miſmo genero de Raices.*

Sean las Raices, que ſe quieren reducir à una miſma denominacion, eſtas $\sqrt[s]{b^r}$, $\sqrt[n]{a^m}$. Multiplicando entrambos Exponentes de la una por el Exponente del ſigno Radical de la otra, ſerán $\sqrt[sn]{b^{rn}}$, $\sqrt[sn]{a^{ms}}$, entrambas tienen un miſmo Exponente en los Signos, y retienen el miſmo valor; porque $\sqrt[s]{b^r} = b^{\frac{r}{s}} = b^{\frac{rn}{sn}} = \sqrt[sn]{b^{rn}}$, y $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{ms}{ns}} = \sqrt[ns]{a^{ms}}$. En ſubſtancia eſto es reducir à un miſmo Denominador los Exponentes de las Potencias perfectas, ò imperfectas, à quienes las Raices equivalen.

PRO-

257 PROBLEMA II. *Reducir una quantidad Radical à Expreſsion mas ſimple.*

Regla. *Mireſe ſi la quantidad, que eſtá baxo el Signo, ò deſpues de él,* que es lo miſmo, *es un producto de cuyos factores el uno ſea una Potencia exacta de Exponente igual al del ſigno Radical. Saqueſe la tal Raiz de eſſe factor, multipliqueſe por la miſma Raiz del otro, y eſte producto ſerá la quantidad Radical reducida à expreſsion mas ſimple, y liſa.*

Hayaſe de reducir à mas ſimple expreſſion $\surd 18$. Por quanto $18 = 9 \times 2$, ſerá $\surd 18 = \surd 9 \times \surd 2$, pero $\surd 9 = 3$; luego $\surd 9 \times \surd 2 = 3\surd 2 = \surd 18$. Aſſimiſmo $\surd \frac{4}{5} = 2\surd \frac{1}{5}$, $\surd \frac{2}{4} = \surd (2 \times \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}\surd 2$. Reduzgaſe eſta otra $\sqrt[m]{a^n x^m}$. Por quanto $a^n x^m = a^n \times x^m$, ſerá $\sqrt[m]{a^n x^m} = \sqrt[m]{a^n} \times \sqrt[m]{x^m}$, pero $\sqrt[m]{x^m} = \sqrt[m]{x^m} = x$; luego $\sqrt[m]{x^m} \times \sqrt[m]{a^n} = x\sqrt[m]{a^n}$. Eſte genero de reducciones ſe llama tambien *ſacar una quantidad de baxo del Signo*, porque en efecto en eſta expreſſion $\sqrt[m]{a^n x^m}$, la quantidad x eſtá comprehendida, ò afecta del ſigno Radical, y en eſta $x\sqrt[m]{a^n}$ no lo eſtá.

De ahí ſe infiere: *Que toda quantidad, que eſté deſpues del ſigno Radical, ſe puede poner antes*

tes, ò ſacar de él, dividiendo ſu Exponente por el del Signo. Aſſi $\sqrt{ab} = a^{\frac{1}{2}}\sqrt{b} = a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$; y al contrario: *Toda quantidad, que eſté fuera del Signo, ſe puede meter dentro, ò deſpues de él, multiplicando ſu Exponente por el del ſigno Radical.* Aſſi $x\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a^n x^m}$. En eſte Próblema ſe funda la Regla, que dimos para ſacar qualquier genero de Raices de las Fracciones Comunes; porque $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b} \times \frac{b^n}{b^n}} = \sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}$.

Tambien ſe reducen las Raices de *mayor à menor dimenſion*, quedando ſiempre del miſmo valor, *dividiendo entrambos Exponentes de Signo, y Potencia por una miſma quantidad.* Aſſi $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt[2]{a}$ dividiendo por 2, $\sqrt[12]{a^{15}} = \sqrt[4]{a^5}$ dividiendo por 3; porque eſto es lo miſmo que dividir Numerador, y Denominador del Exponente de $a^{\frac{15}{12}}$ por 3; al contrario ſe reduce la Raiz de *menor à mayor dimenſion, multiplicando entrambos Exponentes por una miſma quantidad.* Aſſi $\sqrt[4]{a^5} = a^{\frac{5}{4} \times \frac{3}{3}} = a^{\frac{15}{12}} = \sqrt[12]{a^{15}}$.

Hechas ya las Reducciones oportunas, que

permite la calidad de las quantidades Radicales, los Problemas ſiguientes enſeñarán el modo de Calcular con dichas quantidades.

Las Operaciones Arithmeticas con las quantidades Radicales.

258 PROBLEMA I. *Sumar, y Reſtar quantidades Radicales.*

Regla. *Si ſon Raices ſemejantes de una miſma quantidad, y Potencia: Sumenſe, ò Reſtenſe ſus coeficientes; y multipliqueſe la Suma, ò la Reſta por la quantidad Radical, y eſte producto ſerá la Suma, ò la Diferencia de las quantidades dadas.*

Aſſi $3\sqrt{ab} + 5\sqrt{ab} = 8\sqrt{ab}$, $4\sqrt[m]{a^n} - 3\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a^n}$.

Pero ſi à las Radicales dadas les faltaſſe alguna de las *tres* condiciones dichas, la Suma, y Reſta ſe hacen como en las quantidades Algebraicas deſemejantes.

259 PROBLEMA II. *Multiplicar, y Dividir quantidades Radicales.*

Si las quantidades Radicales no fueſſen de una miſma denominacion, reduzganſe à una denominacion miſma. Eſto hecho: Regla. *Multipliquenſe, ò dividanſe entre sí las quantidades, que eſtán baxo el Signo, y al producto, ò quociente pongaſele el ſigno Radical comun.* Eſ-

ta

ta Regla ſe eſtiende, ſean las que fueſſen las quantidades, y Potencias.

Aſſi hayaſe de Multiplicar $\sqrt[3]{b}$ por $\sqrt[4]{c}$, reduciendolas à una miſma denominacion, ſerá $\sqrt[12]{b^4} \times \sqrt[12]{c^3} = \sqrt[12]{b^4c^3}$. Hayaſe de Dividir $\sqrt[3]{b}$ por $\sqrt[4]{c}$, hecha la Reduccion, ſerá el quociente $\sqrt[12]{\frac{b^4}{c^3}}$.

Si en los factores, ò en el Dividendo, ò Diviſor hubieſſe quantidades fuera del Signo, en el quociente, ò en el producto ſe habrá de quedar ſu quociente, ò producto fuera del Signo. Por lo tanto $a\sqrt{b} \times c\sqrt{d} = ac\sqrt{bd}$, $3\sqrt{a} \times 4\sqrt{b} = 12\sqrt{ab}$.

Tengaſe tambien preſente en la Multiplicacion, y Diviſion de quantidades Radicales, la Regla general de los Signos +, ò —, la qual Regla en las Radicales *imaginarias* no ſe eſtiende à los Signos, que eſtán deſpues del ſeñal Radical.

260 Como las Raices, ò quantidades Radicales ſon abſolutamente quantidades, que ſe pueden multiplicar por sí miſmas, ſe podrán tambien levantar à Potencias. Mas ellas tambien ſerán Potencias de otras quantidades inferiores; por conſiguiente ſe podrán ſacar ſus Raices, que ſerán *Raices Segundas*, ò Raices de Raices.

Por lo qual: *Para levantar una Raiz à qual-*

quier Potencia, multipliqueſe ſolo el Exponente de la quantidad Radical por el de la Potencia que ſe buſca, y para ſacar la Raiz de una quantidad Radical, multipliqueſe el Exponente del Signo por el de la Raiz que ſe buſca.

Aſſi $\sqrt[n]{a^m}$ levantado à la Potencia s ſerá $\sqrt[n]{a^{ms}}$; porque $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, el qual levantado à la Potencia s ſerá $a^{\frac{ms}{n}} = \sqrt[n]{a^{ms}}$. De aquí es, *que ſi la Potencia, à que ſe quiere levantar, fueſſe de la miſma denominacion, que el Exponente de la Raiz dada, baſtará para la operacion borrar el ſigno Radical con ſu Exponente*; porque $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, el qual levantado à la Potencia n ſerá $a^{\frac{mn}{n}} = a^m$.

261 Al contrario la Raiz s de $\sqrt[n]{a^m}$ ſerá $\sqrt[sn]{a^m}$; porque $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, el qual reducido à ſu Raiz (s) ſerá $a^{\frac{m}{ns}} = \sqrt[ns]{a^m}$.

Pero ſi la Raiz (s) de una quantidad Radical $\sqrt[n]{a^m}$ ſe ſacára por abreviacion, ſería $\sqrt[s]{\sqrt[n]{a^m}}$, y en tal caſo la Raiz primera $\sqrt[n]{a^m}$ ſe habria de conſiderar como quantidad abſoluta. Por lo tanto en la Multiplicacion,

cion, y Diviſion de $\sqrt[s]{\sqrt[n]{a^m}}$, ſe habria de contar con el ſegundo ſigno Radical $\sqrt[s]{\ }$, para hacer las operaciones.

En las quantidades Radicales *Polinomias*, ò de muchos Terminos la Multiplicacion ſe hace por el methodo comun de la Algebra, guardando las Reglas ſuperiores. En la Diviſion, comunmente por no enredarſe, ſe hace por abreviacion, poniendo el Dividendo por Numerador, y el Diviſor por Denominador. Aſſi $\sqrt{ab}+\sqrt[m]{dc}$ dividido por $\sqrt[3]{d}-\sqrt[4]{dc}$, nos dará por quociente $\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt[m]{dc}}{\sqrt[3]{d}-\sqrt[4]{dc}}$.

CAPITULO XV.

De la Progreſſion Arithmetica.

262 LA Progreſſion Arithmetica es una *Proporcion Arithmetica continuada à muchos terminos*: ò una *Série de quantidades, ò terminos, que aumentan ſucceſsivamente* (ſi la Progreſſion es creciente) *ò diſminuyen* (ſi es decreciente) *con una miſma*,

ma, y conſtante Diferencia de cada uno à ſu immediato. Eſta es una Progreſſion, que va aumentando $a.a+d.a+2d.a+3d.a+4d.$ *&c.* Eſta va diſminuyendo $x.x-d.x-2d.x-3d.x-4d.$ *&c.* En una, y otra Progreſſion la Diferencia conſtante es $d.$

De donde ſe ve, que ſi la Progreſſion es *creciente*, cada termino, excepto el primero, es la *Suma del primero, y de la Diferencia una, ò muchas veces tomada*; y que eſtas Diferencias deſde el ſegundo termino van formando una Progreſſion Arithmetica $d.2d.3d.4d.$ *&c.* Si la Progreſſion es *decreciente*, cada termino, excepto el primero, es *el primero menos la Diferencia comun una, ò muchas veces tomada*, las quales Diferencias van tambien formando otra Progreſſion Arithmetica $-d.-2d.-3d.$ *&c.* Lo miſmo que hemos dicho de los terminos Algebraicos, ſe ha de entender quando eſtos ſon Numericos, como $\div 1.2.3.4.$ &c. $\div 3.2.1.0.-1.-2.$ &c.

263 THEOREMA I. *En toda Progreſsion Arithmetica la Suma del Primero, y Ultimo termino es igual à la Suma de qualeſquiera otros dos terminos igualmente diſtantes de los extremos, y al duplo del medio, ſi el numero de terminos es impar.*

Sea la Progreſſion eſta $a.a+d.a+2d.a+3d.$ *&c.* haſta el ultimo termino x, el penultimo ſerá $x-d$, el antepenultimo $x-2d.$

Pues

Pues las *Sumas* del primero, y ultimo; del ſegundo, y penultimo, &c. ſon iguales entre sí, como ſe ve.

$$\begin{array}{l} a \;.\; a+d \;.\; a+2d \;.\; a+3d \;.\; a+4d \\ x \;.\; x-d \;.\; x-2d \;.\; x-3d \;.\; x-4d \end{array}$$

Sumas $a+x, a+x, a+x, a+x, a+x.$

Y ſi el numero de terminos es *impar*, como en eſtas dos Séries, ſerá en la *creciente* $a+a+4d=2a+4d$, duplo del medio $a+2d$; y en la *decreciente* $x+x-4d=2x-4d$, duplo de $x-2d$.

264 THEOREMA II. *La Suma de todos los terminos en qualquier Progreſsion Arithmetica es igual à la Suma del Primero, y del Ultimo, multiplicada por la mitad del numero de terminos*: ò lo que es lo miſmo, *à la mitad de la Suma de los extremos, multiplicada por el numero de terminos.*

Porque ſiendo la ſuma del primero, y ultimo termino igual à la ſuma de qualeſquiera otros dos terminos, igualmente diſtantes de los extremos, habrá tantas ſumas de extremos, ò ſus iguales, como la mitad del numero de terminos: aſſi ſi el primer termino es a, el ultimo x, y el numero de terminos n, ſerá la ſuma $s=(a+x)\times\frac{n}{2}$.

265 Siendo la comun Diferencia en qualquier Progreſſion Arithmetica d, y no encontrandoſe

trandoſe eſta Diferencia en el primer termino, *ſu coeficiente en qualquier termino de la Progreſsion ſerá igual al numero de terminos, que à eſte termino le preceden.* Y aſſi ſiendo el numero de terminos n, en el ultimo termino x el coeficiente de la Diferencia (d) ſerá $n-1$; de donde $x = a + (n-1)\,d$, ſi la Progreſſion es creciente; ò bien $x = a - (n-1)\,d$, ſi es decreciente.

266 Por lo tanto en qualquier Progreſſion, dado el primer termino (a), la Diferencia (d), y quanto qualquier termino diſta del primero, eſto es, ſi es el *ſegundo*, el *tercero*, *&c.* en la Progreſſion, ſe podrá encontrar ſu valor; pues ſiempre *es igual à la ſuma del primero, y de la Diferencia tomada tantas veces, quanto es el numero de terminos, que le preceden* (ſi la Progreſſion es creciente) *ò al primero menos eſta Diferencia tantas veces tomada, quanto es el numero de terminos, que le preceden* (ſi la Progreſſion es decreciente.)

Aſſi porque al *quarto* termino de la Progreſſion le preceden tres, ſerá eſte $a + 3d$; porque al *quinto* le preceden quatro, ſerá $a + 4d$. Y como al ultimo de la Progreſſion le preceden todos menos uno, ſiendo n el numero de todos, ſerá el ultimo $a + (n-1)\,d$; pero la ſuma de toda la Progreſſion es la ſuma del primero, y del ultimo, multiplicada por la mitad del numero de terminos, ſerá

rá la dicha ſuma $= S = (2a + (n-1)d)\frac{n}{2} = \frac{2an + n^2d - nd}{2} = (a+x)\frac{n}{2}$. Por exemplo en eſta Progreſsion 1 . 2 . 3 . 4 . &c. llegando haſta 95 terminos, ſerá $a = 1$, $n = 95$, $d = 1$, ſubſtituyendo eſtos valores en la Formula general, ſerá ſu ſuma $\frac{2 \times 95 + 95^2 - 95}{2} = 4560$.

267 La Progreſsion Arithmetica (como tambien la Geometrica) puede tener por ſu primer termino 0, como eſta 0 . 1 . 2 . 3 . &c. ò bien eſta otra 0 . 3 . 6 . 9 . &c. porque ſiempre la Diferencia es una miſma; en la primera es 1, y en la ſegunda 3. Pues *en la Progreſsion Arithmetica, cuyo primer termino es 0, la ſuma de todos los terminos es igual à la mitad del producto del ultimo termino por el numero de terminos*: Porque ſubſtituyendo 0 en lugar del primer termino a, en la Formula univerſal $S = (a+x)\frac{n}{2}$, ſerá $S = (0+x)\frac{n}{2} = \frac{xn}{2}$, y ſe ve en la Progreſsion 0 . 1 . 2 . &c. haſta 10 terminos, cuya ſuma es $0+1+2$ &c. $= \frac{10 \times 9}{2} = 45$.

268 De lo dicho haſta aquí, mediante las Reglas de las Equaciones, que darémos en la ſegunda Parte, ſe encuentran las *Formulas*, que exprimen el valor de todas las coſas, que para la practica ſe ſuelen buſcar en qualquier Pro-

Progreſsion Arithmetica, es à ſaber, el *Primer termino* (A) de la Progreſsion, el *Ultimo* (X), *qualquiera de los Intermedios* (M), la *Suma de todos* (S), la *Diferencia*, que reina en los terminos (D), el *Numero de terminos* (N), que haya en la Progreſsion, y (P) el *Numero de terminos*, que preceden el que buſcamos.

$$A = X + D - ND \qquad X = A + (N - 1)D$$

$$M = A + PD \qquad S = (A + X)\frac{N}{2}$$

$$N = \frac{2S}{A + X} \qquad D = \frac{X - A}{N - 1}$$

de manera, que dadas tres coſas de las ſeis arriba dichas, ſe encuentran las otras tres.

Como toda Progreſsion es *creciente* comenzando por un extremo, y *decreciente* comenzando por otro; eſtas Formulas, que ſon para la Progreſsion creciente, podrán tambien ſervir para la decreciente, comenzando à contarla del extremo de donde comienza à crecer.

269 PROBLEMA. *Encontrar quantos terminos ſe quiera* (m) *entre dos terminos dados, de manera, que con ellos formen una Progreſsion Arithmetica.*

Toda la dificultad eſtá en encontrar la *Diferencia*, que debe reinar en eſta Progreſsion; porque el primero dado + *eſta Diferencia* ſerá el ſegundo, &c.

Re-

Regla. *Dividaſe la Diferencia de los dos terminos dados por* m + 1, *y el quociente ſerá la Diferencia, que debe reinar en la Progreſsion.* Hayanſe de buſcar *quatro* terminos entre 7, y 13, que con ellos formen una Progreſsion. Como la Diferencia de 13 à 7 es 6, ſerá la *Diferencia reinante* en la Progreſsion $\frac{6}{m+1} =$ $\frac{6}{4+1} = \frac{6}{5} = 1.2$; pues añadiendo eſta Diferencia al primer termino dado 7, tendrémos el ſegundo 7 + 1.2 = 8.2, y los terminos de la Progreſsion ſerán 7, 8.2, 9.4, 10.6, 11.8, 13.

Eſte Problema puede ſervir, para que dada una Progreſsion Arithmetica, ſe puedan eſtrechar ſus terminos, diſminuyendo las Diferencias, que es meter quantos terminos ſe quiera entre uno, y otro.

CAPITULO XVI.

De la Progreſsion Geometrica.

270 LA Progreſsion Geometrica es *una Série de terminos, que eſtán en Proporcion Geometrica continua*, ò lo que es lo miſmo, *ſe van ſucceſsivamente aumentando por un miſmo Multiplicador*, ſi la Progreſsion

greſsion es *creciente*, ò *ſucceſsivamente diſminuyendo por un miſmo Diviſor*, ſi es *decreciente*.

Aſsi $\begin{cases} a : ar : ar^2 : ar^3 : ar^4 : ar^5 : x \text{ es } \textit{creciente}, \\ a : \frac{a}{r} : \frac{a}{r^2} : \frac{a}{r^3} : \frac{a}{r^4} : \frac{a}{r^5} : x \text{ es } \textit{decreciente}. \end{cases}$

Como los terminos de la Progreſsion eſtán en proporcion continua, la miſma Razon que tiene el primero al ſegundo, tiene el ſegundo al tercero, el tercero al quarto, &c. Y aſsi una, y la miſma es la Razon que tienen entre sí todos los terminos con ſus immediatos ſiguientes, que por eſſo ſe llama *Razon comun de la Progreſsion*, cuyo Exponente es el *Multiplicador*, por cuya multiplicacion los terminos ſe aumentan, ò el *Diviſor*, por quien ſe diſminuyen, que en entrambas Séries es *r*.

271. THEOREMA I. *En toda Progreſsion Geometrica el producto de los extremos es igual al producto de qualeſquiera dos medios igualmente diſtantes de los extremos.*

Sean los quatro primeros terminos de una Progreſsion a, ar, ar^2, ar^3, &c. y el ultimo x, ſerá el penultimo $\frac{x}{r}$, el antepenultimo $\frac{x}{r^2}$, el otro $\frac{x}{r^3}$. El producto del primero, y ultimo ſerá ax, del ſegundo, y penultimo $ar \times \frac{x}{r} = ax$, del tercero, y antepenultimo $ar^2 \times \frac{x}{r^2} = ax$, &c.

Si el numero de terminos de la Progreſsion es impar,

impar, el producto de los extremos, ò de otros dos igualmente distantes de los extremos es igual al Quadrado de el del medio.

Assi en las Progressiones propuestas, será $a \times ar^6 = ar^3 \times ar^3 = a^2r^6$, $a \times \frac{a}{r^6} = \frac{a}{r^3} \times \frac{a}{r^3} = \frac{a^2}{r^6}$.

272 THEOREMA II. *En qualquier Progression*, sea su numero de terminos par, ò impar, *la suma de todos los terminos menos el primero es igual à la suma de todos menos el ultimo, multiplicada por el comun Exponente de la Progression*, esto es, $s - a = (s - x)\, r$.

Porque como toda Progresion es una Proporcion continua, todos los terminos son antecedentes menos el ultimo, y todos son consiguientes menos el primero, y la suma de los antecedentes es à la suma de los consiguientes, como el un antecedente à su consiguiente; luego en la Progresion propuesta tendrémos $s - x : s - a :: a : ar$; y multiplicando extremos, y medios, será $sar - arx = sa - a^2$; dividiendo todos los terminos por a, será $s - a = sr - xr = (s - x)\, r$, y por las Reglas que darémos en las Equaciones, $sr - s = xr - a$; de donde finalmente $s = \frac{xr - a}{r - 1}$, Formula que exprime la *Suma* de todos los terminos de qualquiera Progresion Geometrica.

273 En la Progresion ascendiente propuesta $a : ar : ar^2 : ar^3$: &c. cada termino es el pro-

producto del primero (a), y del *Exponente* de la Razon comun de la Progreſsion (r), elevado eſte Denominador à Potencia de Exponente igual al *numero* de terminos, que à eſte termino le preceden. Aſsi el *tercer* termino ar^2, es el producto de a por r, elevado à la Potencia ſegunda.

En la Progreſsion deſcendiente cada termino es el primero dividido por el Exponente de la Razon comun, elevado à Potencia de Exponente igual al numero de terminos, que le preceden. Aſsi el *tercer* termino en la Progreſsion decreciente es $\frac{a}{r^2}$; luego *en qualquier Progreſsion aſcendiente, dado el primer termino, y el Exponente de la Razon comun, encontrarémos qualquier otro termino, multiplicando el primer termino por dicho Denominador elevado à Potencia de Exponente igual al numero de terminos, que le preceden.* Aſsi ſi ſe quiere encontrar el *quinto*, eſte ſerá ar^4, el *ſexto* ſerá ar^5.

En la Progreſsion deſcendiente qualquier termino ſerá el quociente del primero dividido por el Exponente de la Razon comun elevado à Potencia de Exponente igual al numero de terminos, que preceden. Aſsi el *quarto* termino ſerá $\frac{a}{r^3}$, el *quinto* $\frac{a}{r^4}$.

De donde ſiendo n el numero de terminos de toda la Progreſsion, ſerá el ultimo termino

no x en la Progreſsion aſcendiente $= ar^{n-1}$, y en la deſcendiente $x = \frac{a}{r^{n-1}}$. Por lo qual ſi en la Formula de arriba $s = \frac{xr-a}{r-1}$, que exprime la ſuma de todos los terminos de la Progreſsion, ſubſtituyo en lugar de x, ſu igual, ò ſu valor ar^{n-1},

ſerá $s = \frac{xr-a}{r-1} = \frac{ar^{n-1}r-a}{r-1} = \frac{ar^n-a}{r-1}$.

274 De lo dicho haſta aquí, manejando las Reglas, que darémos ſobre las Equaciones, ſe infieren las Formulas, para encontrar el valor de quanto para la practica ſe buſca en las Progreſsiones, es à ſaber, el *Primer termino* de la Progreſsion (A), el *Ultimo* (X), cada termino en particular, como el *Tercero*, el *Quarto*, *&c.* (M), la *Suma* de todos ellos (S), el *Exponente de la Razon comun*, que reina en toda la Progreſsion (R), finalmente el Numero de terminos (n), de que conſta la Progreſsion, ſignificando p el Numero de terminos, que preceden à cada uno.

$$A = \frac{S(R-1)}{R^n-1} \qquad S = \frac{A(R^n-1)}{R-1} \qquad R = \sqrt[n-1]{\frac{X}{A}}$$

$$X = AR^{n-1} \qquad R^n = \frac{XR}{A} \qquad M = AR^p$$

Eſta penultima Formula $R^n = \frac{XR}{A}$, que exprime

me el numero n de terminos de la Progreſſion, neceſsita de alguna explicacion, y es, que el Numero de terminos n, es igual al Exponente, que tenga la Potencia del *comun* Denominador r, que ſea igual al producto del ultimo termino, y del comun Exponente, dividido por el primer termino a, es à ſaber $\frac{xr}{a}$.

Eſtas Formulas ſirven para la Progreſsion Geometrica de la miſma ſuerte, que las del Capitulo precedente para la de la Arithmetica.

275 PROBLEMA. *Meter un numero* (m) *de terminos proporcionales entre los terminos de una Progreſsion Geometrica.*

Como en toda Progreſsion Geometrica los terminos ſon un producto del primero, que es conſtante (a), por una Potencia del comun Multiplicador (r), y eſtas Potencias eſtán tambien en Progreſsion Geometrica r^0, r^1, r^2, r^3, *&c.* cuyos Exponentes eſtán en proporcion Arithmetica: encontrados los medios *Arithmeticos Proporcionales* entre los Exponentes de las Potencias del comun Multiplicador, encontrarémos los Exponentes de las Potencias del Multiplicador comun, que multiplicadas por el primer termino, compondrán los terminos intermedios, que harán la Progreſsion Geometrica. Y aſsi *dividaſe la Diferencia de los Exponentes del comun Multiplicador, ò Diviſor por* $m + 1$, *y eſte quociente ſerá la Diferencia,*

rencia, que debe reinar entre los Exponentes de las Potencias del comun Multiplicador, ò Divisor, que multiplicadas por el primer termino (si la Progresion es creciente) *ò dividido este por ellas* (si es decreciente) *compondrán los terminos intermedios.*

Hayanse de meter *quatro* terminos Geometrico Proporcionales entre cada uno de los terminos de esta Progresion ar^0, ar^1, ar^2, ar^3, &c. Se ve, que los Exponentes del comun Multiplicador (r) forman una Progresion Arithmetica 0, 1, 2, 3, &c. cuya Diferencia es 1, pues la Diferencia de los Exponentes de los terminos intermedios será $\frac{1}{m+1} = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$; y assi será la nueva Progresion $ar^0, ar^{\frac{1}{5}}, ar^{\frac{2}{5}}, ar^{\frac{3}{5}}, ar^{\frac{4}{5}}, ar^1, ar^{\frac{6}{5}}$, &c. en donde se ve, que en medio de los dos terminos de la Progresion dada ar^0, ar^1 se han metido quatro medios proporcionales, que forman con ellos una nueva Progresion. Si la Proporcion fuere decreciente $\frac{a}{r^0}, \frac{a}{r^1}$, &c. serian $\frac{a}{r^0}, \frac{a}{r^{\frac{1}{5}}}, \frac{a}{r^{\frac{2}{5}}}$, &c.

CAPITULO XVII.

De la Proporcion, y Progreſſion Harmonica.

276 LA *Proporcion Harmonica*, que otros llaman *Proporcion Muſica*, es cierta eſpecie de Proporcion Geometrica, en la qual ſi la Proporcion Harmonica es *Continua*, el *Primer termino tiene al Tercero la miſma Razon Geometrica, que la Diferencia entre el Primero, y Segundo tiene à la Diferencia entre el Segundo, y Tercero*; y ſi la Proporcion Harmonica es *Diſcreta*, el *Primer termino tiene la miſma Razon Geometrica al Quarto, que la Diferencia entre el Primero, y Segundo tiene à la Diferencia entre el Tercero, y Quarto.*

En fuerza de eſtas dos Definiciones de la Proporcion Harmonica *Continua*, y *Diſcreta*; en la Continua, ſupueſtos los tres terminos A, B, C, ſerá A : C :: A — B : B — C; de donde reſultan las ſiguientes Formulas:

$$A = \frac{B \times C}{2C - B} \quad B = \frac{2A \times C}{C + A} \quad C = \frac{B \times A}{2A - B}.$$

Dados dos qualeſquiera de los *tres* terminos, ſe encuentra el otro.

277 Para la Proporcion Harmonica Diſcreta,

creta, ſiendo ſus quatro terminos A, B, C, D, tendrémos A : D :: A — B : C — D; de donde

$$A = \frac{D \times B}{2D - C} \qquad B = \frac{A \times (2D - C)}{D}$$

$$C = \frac{D \times (2A - B)}{A} \qquad D = \frac{C \times A}{2A - B}.$$

Con que dados tres qualeſquiera terminos, ſe encontrará tambien el otro.

Pero como la Proporcion Harmonica es de baſtante uſo en la Optica, y en aquella parte de la Phyſica, que trata del *Sonido*, es meneſter explicar algunas Propriedades de la *Progreſsion Harmonica*, que tambien es una Continua Proporcion alargada à mas de tres terminos. Para lo qual ſean los terminos de la Progreſsion Harmonica A, B, C, D, E, F, &c. y las Diferencias reſpectivas entre cada dos immediatos } M, N, O, P, Q, &c.

278 THEOREMA I. *El Producto de los dos primeros terminos de la Progreſsion Harmonica, es al Producto de qualeſquiera otros dos immediatos entre sí, como ſus reſpectivas Diferencias.*

Eſto es A × B : C × D :: M : O.

Porque por la naturaleza de la Proporcion Harmonica, ſerá A : C :: M : N

B : D :: N : O

luego A × B : C × D (:: M × N : N × O) :: M : O.

Mas

Mas por la miſma razon ſerá

A : C :: M : N
B : D :: N : O
C : E :: O : P

luego A x B x C : C x D x E :: M x N x O : N x O x P.

Eſto es A x B : D x E :: M : P;

y aſsi ſe puede proſeguir la demonſtracion en todos los demás terminos de la Progreſsion Harmonica.

279 THEOREMA II. *La Diferencia* M *entre los dos Primeros terminos de la Progreſsion Harmonica es à la Diferencia* O *entre qualeſquiera otros dos immediatos entre sí* :: B — 2M : D.

De la miſma ſuerte M : P :: B — 3M : E, y M : Q :: B — 4M : F, &c.

Porque por la naturaleza de eſta Progreſsion tenemos A : C :: M : N; pero A = B — M, luego B — M : C :: M : N (y para que deſde el principio ſe vea la lei, que guardan, reduciendolo à debida forma, ſerá M : N :: B — 1M : C.)

Alternando, B — M : M :: C : N, y dividiendo B — 2M : M (:: C — N : N) :: B : N; pero B : N :: D : O, luego M : O :: B — 2M : D.

En fin B — 3M : M (:: D — O : O :: C : O) :: E : P, luego M : P :: B — 3M : E, &c.

En general ſea *n* = al Numero de terminos, que median entre el Primero, y Ultimo Z de la Progreſsion, y la Diferencia entre el Ultimo, y Penultimo ſea S, ſerá ſegun el miſmo modo de diſcurrir M : S :: B — *n*M : Z.

Aña-

Añadeſe, que ſupueſtos los dos ultimos terminos de la Progreſsion Y, y Z, por el Theor. 19. tendrémos M : S :: A x B : Y x Z; por conſiguiente en fuerza de eſtas dos ultimas analogias, ſerá A x B : Y x Z :: B — nM : Z.

Siendo A x B : B x C :: M : N :: B — M : C, ſerá A x B : B x C :: B — M : C; dividiendo los conſiguientes por C, tendrémos A x B : B :: B — M : 1, luego B = $\frac{A \times B}{B - M}$. Tambien por ſer A x B : D x C :: B — 2M : D, ſerá C = $\frac{A \times B}{B - 2M}$; y en general ſiendo A x B : Y x Z :: B — nM : Z, ſerá Y = $\frac{A \times B}{B - nM}$.

Supueſto pues n = al Numero de terminos entre A, y Z, exprimirá n el lugar, ò pueſto, que tenga Y en la Progreſsion, ò lo que es lo miſmo el Numero de terminos, que le preceden; de donde para encontrar qualquier termino de la Progreſsion Harmonica:

Regla general. *Qualquiera termino de la Progreſsion Harmonica es igual al Producto del Primero por el Segundo, dividido por el Segundo, menos la Diferencia entre el Primero, y Segundo multiplicada por el Numero de terminos, que preceden al termino que buſcamos*; pues precediendo n terminos à Y, ſerá Y = $\frac{A \times B}{B - nM}$.

Aſsi dados eſtos dos primeros terminos 10,

12 de una Progreſsion Harmonica, el Tercero es $\frac{10 \times 12}{12 - 2 \times 2} = 15$, el Quarto $\frac{10 \times 12}{12 - 3 \times 2} = 20$, finalmente el Sexto $\frac{10 \times 12}{12 - 5 \times 2} = 60$; pues ſiempre $Y = \frac{A \times B}{B - nM}$.

280 Pero una coſa particular hai en la Progreſsion Harmonica, que no ſucede en la Arithmetica, ni Geometrica, y es, que qualquiera de eſtas dos ſe puede proſeguir al *infinito*; pero la Harmonica ſe limita à un determinado numero de terminos, ſegun fueſſen los dos Primeros, pues immediatamente paſſado el ultimo, ya el Denominador de eſta Formula, que exprime el valor de qualquier termino $Y = \frac{A \times B}{B - nM}$, es 0.

Aſsi ſiendo los dos Primeros terminos los propueſtos 10, 12, el Sexto es $\frac{10 \times 12}{12 - 5 \times 2} = 60$; pero el Septimo es $\frac{10 \times 12}{12 - 6 \times 2} = \frac{120}{0}$, que es, ò bien cero, ò bien infinito, y aſsi ſe limita la tal Progreſsion à ſolos ſeis terminos, aunque vuelve à empezar en el octavo.

281 THEOREMA III. *Los Terminos de una Progreſsion Harmonica, ſon entre sí como las Quantidades, cuyos Reciprocos forman una Progreſsion Arithmetica.*

Aque-

Aquellos Terminos ſon entre sí *Reciprocos*, cuyo producto de entrambos es la Unidad, tales ſon a, y $\frac{1}{a}$, &c.

Por lo aquí dicho los Terminos de la Progreſsion Harmonica ſuperior A, B, C, D, &c. ſon entre sí como $\frac{A \times B}{B}$, $\frac{A \times B}{B-M}$, $\frac{A \times B}{B-2M}$, &c. y dividiendo por $A \times B$, como $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{B-M}$, $\frac{1}{B-2M}$, &c. cuyos Reciprocos B, B — M, B — 2M, &c. ſon una Progreſsion Arithmetica.

Lo que hemos diſcurrido haſta aquí de la Progreſsion Harmonica ſe entiende de la Progreſsion Creciente, pero ſi la Progreſsion fueſſe Decreciente, los reſultados ſerian los miſmos, excepto que los Signos de M, y B ſerian contrarios; porque en tal caſo $A - B = M$, $B - C = N$, pero en la Creciente $B - A = M$.

CAPITULO XVIII.

De los Logarithmos en Comun.

282 PAra entender bien eſta materia de Logarithmos, ſe ha de tener preſente lo que hemos dicho de las Progreſſiones Geometrica, y Arithmetica, de las Razones

zones Compueſtas en los terminos, que forman una Série, y de la Multiplicacion, y Diviſion de las Potencias de una miſma Raiz por medio de ſus Exponentes. Eſto ſupueſto:

Los *Logarithmos* ſon *los Terminos de una Progreſsion Arithmetica aplicados à los de una Progreſsion Geometrica, de manera que la Suma de dos, ò mas de la Progreſsion Arithmetica, correſponda al Producto de los de la Geometrica*; por conſiguiente la *Diferencia* de dos de la Progreſsion Arithmetica, correſponde al *Quociente*, que reſulta de la diviſion de uno por el otro de los de la Progreſsion Geometrica.

Sean eſtas dos Progreſsiones.

Geometrica 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : &c.
Arithmetica 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . &c.

Tomemos la *Suma* del Segundo, y del Tercero de la Progreſsion Arithmetica, eſto es, $1 + 2 = 3$, pues eſte pertenece à 8, producto de 2×4 en la Progreſsion Geometrica. Tomemos la *Suma* del Tercero, y Quarto $2 + 3 = 5$, que correſponde en la Geometrica à 32, producto de 4×8. De la miſma ſuerte ſale en qualquier Suma, de quantos terminos quiera, de la Progreſsion Arithmetica, que ſiempre correſponde al producto, cuyos factores ſon los terminos correſpondientes à las partes de la Suma.

Para ver como la *Diferencia* de los terminos de la Progreſsion Arithmetica correſponde

de al *Quociente* de los de la Geometrica, tomemos la Diferencia de dos Logarithmos $4 - 3 = 1$ Logarithmo de $\frac{16}{8} = 2$: aſsimiſmo $6 - 3 = 3$ Logarithmo de $\frac{64}{8} = 8$; pues ſe ve, que la Diferencia de dos terminos de la Progreſsion Arithmetica correſponde al Quociente de ſus reſpectivos terminos de la Geometrica: y aſsi cada termino de la Progreſsion Arithmetica es Logarithmo de ſu correſpondiente en la otra Progreſsion.

283 Lo que hemos hecho en eſtas dos Séries particulares, hagamoslo en Séries univerſales, de ſuerte que la Geometrica comience de 1, y la Arithmetica de 0,

ſerán $\begin{cases} \div\div 1 : x : x^2 : x^3 : x^4 : x^5 : x^6 : x^7 : \&c. \\ \div 0 . a . 2a . 3a . 4a . 5a . 6a . 7a . \&c. \end{cases}$

Veaſe como ſucede lo miſmo que la *Suma* de los Logarithmos es Logarithmo del producto de las Potencias correſpondientes: aſsi $2a + 4a = 6a$ Logarithmo de $x^2 \times x^4 = x^6$; y la Diferencia de los Logarithmos es Logarithmo del Quociente de las Potencias correſpondientes divididas entre sí, $4a - 3a = a$ Logarithmo de $\frac{x^4}{x^3} = x$.

Lo miſmo que hemos experimentado en eſtas dos Séries ſubiendo deſde 1, y deſde 0 ácia

ácia arriba, encontrarémos proſiguiendolas aſſi abaxo:

$$\begin{array}{l} \therefore \\ \therefore \\ \div \\ \div \end{array} \begin{array}{c} 1 : \frac{1}{x} : \frac{1}{x^2} : \frac{1}{x^3} : \frac{1}{x^4} : \frac{1}{x^5} : \frac{1}{x^6} \\ 0 . -a . -2a . -3a . -4a . -5a . -6a. \end{array}$$

284 De eſta ſola Definicion, ò principal Propriedad de los Logarithmos ſe infieren muchas coſas utiliſsimas para la practica.

1°. *Que ſolo puede haber Logarithmos reſpecto de Potencias de una miſma Raiz*, la qual Raiz, que en la ſuperior Série es x, ſe llama *Baſe Logarithmica*, y que la Série de eſſas Potencias debe empezar de 1.

2°. *Que en toda eſpecie de Logarithmos ſiempre el Logarithmo de la unidad*, ò de 1, ò el primer termino de la Progreſſion Arithmetica *debe ſer* 0; porque aſſi como 1 ni aumenta, ni diſminuye el termino, que multiplica, ò que divide (pues $1 \times a = a = \frac{a}{1}$) aſſi ſu Logarithmo debe ſer un termino, que ni junto à otro lo aumente, ni quitado de él lo diſminuya, y eſto ſolo conviene à 0, pues $a + 0 = a$, $a - 0 = a$.

3°. *Que el Logarithmo de qualquier Fraccion propria debe ſer una Quantidad negativa, ò Logarithmo negativo*; ya porque como la tal Fraccion ſiempre diſminuye la quantidad, por quien ſe multiplica, aſſi ſu Logarithmo ſiem-

ſiempre debe diſminuir la quantidad à quien ſe añade, lo que ſolo convíene à las quantidades negativas; ya tambien porque como la Fraccion propria es menor, que la unidad, tambien ſu Logarithmo debe ſer menor, que el Logarithmo de la unidad, que es o, por conſiguiente quantidad negativa; y ſe ve en las dos Séries propueſtas, que el Logarithmo de $\frac{x^5}{x^7} = \frac{1}{x^2}$, es $5a - 7a = -2a$.

4°. Que los Logarithmos nos ahorran mucho trabajo en las multiplicaciones, y diviſiones de quantidades Numericas; pues ſupueſto que en las *Tablas de Logarithmos* eſtán los Logarithmos, y al lado las quantidades Numericas, que les correſponden, habiendo de multiplicar dos, ò mas quantidades, *ſumenſe ſus Logarithmos, y la ſuma ſerá el Logarithmo del producto*; con que encontrando el numero, que correſponde à dicha ſuma, tendrémos el producto de las quantidades dadas.

5°. De la miſma ſuerte para dividirlas, *buſquenſe ſus Logarithmos en las Tablas, quiteſe del Logarithmo del Dividendo el del Diviſor, la Diferencia ſerá el Logarithmo del Quociente*; luego buſcando en las Tablas el numero, que correſponde à eſta *Diferencia*, tendrémos el quociente de dichas quantidades.

6°. Como toda Fraccion propria, ò impropria es igual al quociente del Numerador dividido

vidido por el Denominador, *quitando del Logarithmo del Numerador el del Denominador, la Reſta ſerá el Logarithmo de la Fraccion*; de aquí es, que para encontrar el Logarithmo de un numero mixto, es buen medio reducir dicho numero à Fraccion impropria.

7°. Que como para encontrar un Quarto Geometrico Proporcional, multiplicamos ſegundo por tercero, y dividimos eſte producto por el primero, aſſi tomando ſus Logarithmos correſpondientes, *ſi de la ſuma de los Logarithmos del ſegundo, y tercer termino, quitamos el Logarithmo del primero, la Diferencia ſerá el Logarithmo del Quarto proporcional*; por la miſma razon, en la Proporcion continua, *ſi del duplo del Logarithmo del ſegundo, ſe quita el Logarithmo del primero, la Diferencia ſerá el Logarithmo del Tercero.*

285 Mas ſupueſto qualquier termino A, cuyo Logarithmo ſea a, el Logarithmo de A^2 ſerá $a+a=2a$, el de A^3 ſerá $a+a+a=3a$, el de A^4 ſerá $4a$, en general el de A^n ſerá na. De donde ſe ſaca la Regla general: *Que el Logarithmo de qualquier Potencia es igual al de la Raiz multiplicado por el Exponente de la Potencia*, pues $na=n\times a$; y ſe ve en las dos Séries propueſtas, en que para encontrar el Logarithmo de x^7, ſe multiplica el Logarithmo a de la Raiz x por el Exponente 7 de la Potencia 7ª. y da por ſu Logarithmo $a\times 7=7a$.

Eſta

Esta Regla se estiende no solo à las Potencias de A, que se forman por multiplicacion A^2, A^3, &c. sino tambien à las Potencias negativas de A, esto es $\frac{I}{A}$, $\frac{I}{A^2}$, &c. Pues el Logarithmo de $\frac{I}{A} = o - a = -a$, el de $\frac{I}{A^2} = -2a$, en general el de $\frac{I}{A^n}$ es $-na$, pero $\frac{I}{A^n} = A^{-n}$, y $-na = -n \times a$; luego el Logarithmo de qualquier Potencia (sea positiva, ò negativa, perfecta, ò imperfecta) es el de la Raiz multiplicado por el Exponente de la Potencia.

286 *Si el Logarithmo de una Potencia de* A, *como* A^m *es* q, *el Logarithmo de la Raiz* A *será* $\frac{q}{m}$; porque el Logarithmo de la Raiz debe ser una quantidad, que multiplicada por el Exponente de la Potencia, dé por producto el Logarithmo de la Potencia, segun lo dicho antes, y solo $\frac{q}{m}$ es la tal quantidad, pues $\frac{q}{m} \times m = \frac{qm}{m} = q$, Logarithmo de la Potencia A^m. De donde se saca la Regla general: *Que el Logarithmo de la Raiz es igual al de la Potencia, dividido por el Exponente de la Raiz.*

Assi en las dos Séries propuestas, dado el Logarithmo de x^7, es à saber $7a$, si lo dividimos por el Exponente de la Potencia 7, que es el mismo que de la Raiz *septima*, dará $\frac{7a}{7} = a$ Lo-

Logarithmo de x, que es *ſeptima* Raiz de x^7; porque ſi el Logarithmo de la Raiz multiplicado por el Exponente de la Potencia da el Logarithmo de la Potencia, deshaciendo lo hecho, eſto es, dividiendo eſte producto por el Exponente de la Raiz, dará el Logarithmo de la Raiz.

287 De ahí es, que ſi tenemos el Logarithmo de qualquier quantidad, y lo dividimos por 2, *Exponente de la Raiz quadrada*, ò tomamos ſu *mitad*, que es lo miſmo, eſta mitad ſerá el Logarithmo de la Raiz quadrada; ſi lo dividimos por 3, *Exponente de la Raiz cubica*, ò tomamos ſu *tercio*, tendrémos el Logarithmo de ſu Raiz cubica; en general ſi ſe divide por n, ſea n Entero, ò Quebrado, tendrémos el Logarithmo de la Raiz n de la tal quantidad; y como un medio proporcional es la Raiz quadrada del producto de los extremos, *ſi ſe toma la mitad de la ſuma de los Logarithmos de los extremos, tendrémos el Logarithmo del medio proporcional.*

Pues he aquí por medio de los Logarithmos un modo facil, y breve para ſacar las Raices qualeſquiera de qualquier Quantidad Numerica, y para levantar qualeſquiera quantidades à qualquier Potencia; porque *multiplicando el Logarithmo de la Raiz por el Exponente de la Potencia que ſe buſca, ſe tiene el Logarithmo de la tal Potencia, y dividiendo el Logarithmo*

de

de la quantidad por el Exponente de la Raiz que ſe buſca, ſe tiene el Logarithmo de la Raiz.

288 Si entre cada dos terminos de las dos Séries propueſtas arriba

$$\begin{array}{l} \div\div \\ \div\div \\ \div \end{array} \begin{array}{l} 1 : x : x^2 : x^3 : x^4 : x^5 : \&c. \\ 0 . a . 2a . 3a . 4a . 5a . \&c. \end{array}$$

metemos quantos quiera medios proporcionales, es cierto, que ſiendo igual el numero de medios proporcionales entre los de la Progreſſion Arithmetica, que entre los de la Geometrica, tambien los unos ſerán los Logarithmos de los de la otra, y aſſi les conviéne la Definicion general de los Logarithmos.

Mas como en toda Série la Razon que tienen entre sí dos terminos, es compueſta de todas las Razones intermedias, y ſi eſtas Razones ſon iguales, como ſiempre lo ſon en la Progreſſion, la Razon Compueſta es tantuplicada de cada una de ellas, quanto es el numero de Razones de que ſe compone; ſi entre los dos terminos primeros $1, x$ metemos nueve medios proporcionales, la Razon de 1 à x ſerá *decuplicada* de la Razon de 1 al primer medio proporcional, que ſiendo como *Medida* de las demás Razones, ſerá el *Ratio modularis*, ò el *Modulo* de toda la Progreſsion.

289 Si por conſiguiente entre los dos primeros terminos de la Progreſsion Arithmetica $0, a$ metemos otros nueve terminos Arithmetico Proporcionales, tambien la Razon de

$0 . a$

o . *a* ſerá compueſta de todas las Razones intermedias, y *a* ſerá tantuplo del primer medio proporcional Arithmetico, quantupla ſea la Compueſta 1 : *x*, reſpecto de la primera Razon. Y aſſi los Logarithmos ſerán los *Exponentes de las Razones, que tengan ſus reſpectivos terminos reſpecto de la unidad*, lo que propriamente exprime la palabra latinizada *Logarithmus* del Griego *Logoon arythmos*, que es decir *Numero de Razones* de que ſe compone.

Pero como es libre meter mas, ò menos medios entre dos terminos dados; de ahí vienen los diferentes Syſtemas de Logarithmos, que por conſiguiente tendrán diferentes *Baſes Logarithmicas*; pues *x* ſerá tanto mayor Potencia reſpecto del primer medio proporcional, quantos mas medios proporcionales haya entre 1, y *x*, por conſiguiente *x* tiene mayor Razon reſpecto de él.

En la Geometría, en donde las quantidades ſe exprimen por Lineas, como en la Algebra por Letras, los Logarithmos ſe repreſentan por las *Abſciſſas*, y los Numeros correſpondientes por las *Ordenadas* de una Curva, que por eſſo ſe llama *Logarithmica*; ò bien los Logarithmos ſe exprimen por las *Areas* comprehendidas entre las Ordenadas, y los Numeros por las reſpectivas *Abſciſſas*, como en los *Logarithmos Hyperbolicos*.

CAPI-

CAPITULO XIX.

Syſtema de los Logarithmos de Briggs.

ARTICULO PRIMERO.

Propriedades generales de eſtos Logarithmos.

290 LA Doctrina haſta aquí explicada es general en toda eſpecie de Logarithmos. Vamos al particular, y expliquemos el Syſtema de Briggs el mas util en la practica, y de cuyas Tablas de Logarithmos nos ſervimos comunmente.

Eſte Syſtema toma por Série Geometrica la de las Potencias de 10, y por Série Arithmetica la de los Numeros Naturales, es à ſaber,

÷ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : &c.
÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . &c.

Pueſtas eſtas dos Séries, atendiendo à la Doctrina dada, tomando en la Série Geometrica medios proporcionales entre 1, y 10, y en la Série Arithmetica entre 0, y 1, eſtos ſerán Logarithmos de aquellos. Encontrados pues los Logarithmos de los numeros medios entre 1, y 10, ſe encontrarán los de ſus multiplices; tomando el Logarith-

mo de 2, doblandolo, tendrémos el Logarithmo de ſu Quadrado 4, triplicandolo, el de ſu Cubo, finalmente multiplicandolo por el Exponente de qualquier Potencia, tendrémos el Logarithmo de qualquier Potencia de 2. De la miſma ſuerte los de las Potencias de los otros numeros medios entre 1, y 10.

Mas encontrados por exemplo los Logarithmos de 2, y de 3, ſumandolos, encontrarémos el Logarithmo de $2 \times 3 = 6$; y aſſi ſumando los Logarithmos de qualeſquiera numeros ſimples, la ſuma ſerá el Logarithmo de ſu Producto.

Aſſi ſe han ido formando los Logarithmos, que arreglados à los numeros por ſu orden, forman las que llamamos *Tablas de Logarithmos*, en donde en la una columna eſtán los Numeros, y en la otra à ſu lado eſtán los Logarithmos correſpondientes.

291 Viſta pues la conſtruccion de eſtas Tablas, tenganſe bien preſentes las dos Séries propueſtas, para comprehender las propriedades de eſtos Logarithmos.

En eſte Syſtema ſe ve 1°. *Que cada Logarithmo es el Exponente de la Potencia de* 10, *que es ſu termino correſpondiente.* Aſſi porque $100 = 10^2$, el Logarithmo de 100, *Quadrado* de 10, es 2, Exponente del Quadrado; $1000 = 10^3$, por eſſo ſu Logarithmo es 3, &c. por conſiguiente todos los Numeros Quebrados,

ò Enteros se podrán mirar como *tales Potencias de* 10, *quales exponen sus Logarithmos.*

Se ve 2°. *Que toda quantidad posible entre* 0, *y* 1, *como son todas las Fracciones proprias, ha de tener Logarithmo negativo*; porque, como hemos dicho, siendo la tal quantidad menor que la unidad, su Logarithmo ha de ser tambien menor, que el Logarithmo de 1, esto es, menor que 0, por consiguiente quantidad negativa.

En orden à estos *Logarithmos negativos*, quales son todos los de las Fracciones proprias, se ha de advertir, que aunque la quantidad, que es Logarithmo de una Fraccion, sea absolutamente negativa, *se exprime en quantidades parte positivas, parte negativas*, excediendo no obstante las negativas. Sea por exemplo el Logarithmo de una Fraccion esta quantidad $-\frac{3}{10} = 0 - .3$; assi la expression es toda negativa, pero puesta de esta suerte $-1 + .7$ $(= 0 - .3)$ la expression es parte negativa, que es la del Entero -1, y parte positiva $+.7$, que es la Fraccion decimal. Pues de esta suerte se exprimen los Logarithmos negativos, en quienes el *Entero* es negativo, y la *Parte decimal* es toda positiva, lo que se ha de tener bien presente, para quando se hayan de sumar Logarithmos de Fracciones.

3°. *Que todos los numeros posibles Enteros, ò Quebrados, que median entre* 1, *y* 10 *han de*

tener por Logarithmo una Fraccion pura; pues eſte Logarithmo ha de ſer uno de los medios proporcionales Arithmeticos entre 0, y 1, por conſiguiente *mayor* que 0, y *menor* que 1.

Eſtas Fracciones en los Logarithmos ſe ponen por *Decimales*, que ſiempre, como hemos dicho, ſon poſitivas, y ſolo llegan comunmente haſta ſiete figuras, aunque ſe podrian eſtender à mas, para mayor preciſion, y ſe ſeparan con un puntico de la integral, aunque eſta ſeparacion muchas veces ſe omite, por ſuponerſe.

4°. *Que todo numero Entero, ò Quebrado, que medie entre* 10, *y* 100, *debe tener por Logarithmo* 1 + *una Fraccion*; pues el Logarithmo del tal numero debe ſer un medio Arithmetico proporcional entre 1, y 2, aſſi mayor que 1, y menor que 2. De la miſma ſuerte todo numero medio entre 100, y 1000 debe tener por Logar. 2 + una Fraccion. Diſcurraſe aſſi en todas las Potencias perfectas de 10.

292 De lo dicho ſe ve, que tales Logarithmos conſtan de Entero, y Quebrado; el *Entero* ſe llama *Châracteriſtica*, el *Quebrado*, ò la Fraccion decimal ſe llama *Mantiſſa*. Por exemplo en el Logarithmo de 4001, que es 3.6021686, la Châracteriſtica es el Entero 3, la Mantiſſa es la Fraccion decimal .6021686.

La Châracteriſtica tiene una propriedad mui util, y es, *que ſiempre contiene tantas unidades*

dades como cifras de Enteros, menos una, tiene el numero, reſpecto de quien con la Fraccion decimal es Logarithmo. Aſſi en el Exemplo propueſto la Châracteriſtica 3 contiene *tres* unidades; luego ſu numero debe contener *quatro* cifras de Enteros, y ſe ve que 4001 las tiene: de donde à la ſola viſta de la Châracteriſtica podemos inferir el numero de cifras de Enteros, de que conſta ſu reſpectivo termino. Y al contrario à la viſta del numero de cifras de Enteros de que conſte la quantidad, cuyo Logarithmo buſcamos, podemos inferir quantas unidades debe contener ſu Châracteriſtica. Aſſi al ver que el numero 4001 conſta de *quatro* cifras de Enteros, infiero que la Châracteriſtica de ſu Logarithmo ſolo debe contener *tres* unidades, y aſſi ha de ſer 3.

Algunos, como Saunderſon, proponen eſta Regla con terminos, que ſe eſtienden ya à la Châracteriſtica de los Logarithmos de los Enteros, ya à la de los Logarithmos de Fracciones reducidas à Decimales. Y es: *Que ſi la quantidad dada conſta de Enteros, en la Châracteriſtica de ſu Logarithmo habrá tantas unidades, quantas cifras en el numero dado preceden à la cifra de unidades; y ſi el numero dado conſta de ſolas Decimales, en la Châracteriſtica de ſu Logarithmo hai tantas unidades negativas, como ceros de Enteros, y Decimales preceden à la primera cifra ſignificativa.*

Aſſi

Assi como en esta quantidad 34567.89 al 7, que es la cifra de unidades, le preceden *quatro* cifras, la Châracteristica de su Logarithmo debe ser 4. En las Fracciones, como en esta quantidad fraccional 0.03456789 al 3, que es la primera cifra *significativa*, le preceden *dos* ceros, la Châracteristica de su Logarithmo debe tener dos unidades negativas, y assi ha de ser — 2.

Fundados en esta advertencia en algunas *Tablas de Logarithmos* omiten las Châracteristicas, porque se infieren à la sola vista del numero de cifras de Enteros, de que consta la quantidad, cuyo Logarithmo buscamos.

293 Como es mui corriente en el Calculo el Multiplicar, y el Dividir por 10, por 100, por 1000, &c. en este Systema de Briggs se logra con grande expedicion *con solo añadir* (para el Multiplicar) *ò quitar* (para el Dividir) *à la Châracteristica del Logarithmo del Multiplicando, ò del Dividendo*, 1, 2, 3, *&c.* (que son los Exponentes de las Potencias de 10, por quienes multiplicamos, ò dividimos) *dexando intactas las Decimales.*

Por exemplo hayase de Multiplicar 101 por 10. Haciendo la operacion por Logarithmos, sumese el Logarithmo de 101, es à saber 2.0043214 con el de 10, que es 1.0000000; pues porque las Decimales del Logarithmo de 10, y de sus Potencias perfectas son ceros, que

nada

nada añaden, ſe hace facilmente la ſuma, añadiendo al Logarithmo del Multiplicando el Entero del Logarithmo del Multiplicador, que es 1, y aſſi el Logarithmo del producto ſerá = 3.0043214. Si ſe hubieſſe de multiplicar por 100, ſe habria de añadir à la Characteriſtica 2; ſi por 1000, añadaſe 3, &c. Al contrario para dividir por dichas quantidades, habria de quitar 1, 2, 3, &c. de la Characteriſtica del Dividendo.

294 Algunas veces en eſte punto de Logarithmos ocurre tambien el *Complemento Logarithmico*, que otros llaman *Complemento Arithmetico*, que no es otra coſa, *que la Diferencia entre un Logarithmo dado, y el Logarithmo de la decima Potencia de* 10, eſto es 10. Y ſe encuentra facilmente eſte Complemento, poniendo baxo de cada cifra del Logarithmo dado, quanto dicha cifra diſta de 9, y en la ultima ſignificativa quanto diſta de 10, comenzando eſta operacion deſde la izquierda. Eſto no es otra coſa, que quitar de eſta quantidad 10 el Logarithmo dado. Aſſi el Complemento Arithmetico del Logarithmo (de 456) 2.6589648 es 7.3410352.

ARTI-

ARTICULO II.

De algunas cosas que se ofrecen en la practica de los Logarithmos de Briggs.

295 ENtendidas las propriedades del Systema de los Logarithmos de Briggs, basta para Elementos entender su uso, y allanar algunas dificultades, que mas frequentemente suelen ocurrir en la practica, supuesto que otros han trabajado por nosotros, formandonos sus Tablas. En las Tablas de Logarithmos están los Numeros Naturales Enteros, comenzando de 1 adelante, y segun ellas sean mas, ò menos completas, se estienden à mayor, ò menor numero, unas llegan hasta 10000, otras hasta 20000, &c. En otra columna à su lado están los Logarithmos respectivos.

296 Esto supuesto, las dificultades, que suelen ocurrir, son 1º. Dado un *Numero mayor, que el mayor de las Tablas*, encontrar su Logarithmo; y al contrario dado un *Logarithmo mayor, que el mayor de las Tablas*, encontrar su Numero correspondiente.

2º. Dado un *Numero Intermedio* à los de las Tablas, encontrar su Logarithmo; y al contrario dado un *Logarithmo Intermedio à los de*

de las Tablas, encontrarle el Numero, que le competa.

3°. Dado un *Numero menor, que el menor de las Tablas*, encontrar ſu Logarithmo; y al contrario dado un *Logarithmo menor, que el menor de las Tablas*, encontrar el Numero, que le correſponda.

Todas eſtas dificultades allanarémos en los Problemas ſiguientes.

297 PROBLEMA I. *Dado un Numero mayor, que el mayor de las Tablas, encontrar ſu Logarithmo.*

Si el Numero dado no excede à 10000000.

Regla. *Tomeſe de las Tablas el Logarithmo, que correſponde à las quatro primeras figuras del Numero dado, la Diferencia entre eſte Logarithmo, y el del Numero immediato ſuperior multipliqueſe por las otras figuras, que quedan del tal Numero, y quitando de eſte producto ácia la derecha tantas figuras, quantas hai mas que quatro en el Numero dado, añadanſe las otras al Logarithmo encontrado de las quatro primeras figuras, la Suma ſerá el Logarithmo que ſe buſca, dandole la Châracteriſtica correſpondiente.*

Aſſi buſcando el Logarithmo de un Numero de *ſiete* figuras, como en el Exemplo, multipliqueſe la Diferencia entre el Logarithmo de las *quatro* primeras figuras, y el del immediato ſuperior por las *tres* ultimas cifras del Numero dado; ſi el producto tubieſſe ſiete,

añ-

añadiendo las quatro primeras figuras de eſte producto al Logarithmo de las quatro primeras del Numero dado, la Suma ſerá el Logarithmo que ſe buſca, dandole por Châracteriſtica la que le pertenezca por el numero de figuras, de que conſte la quantidad dada.

Por exemplo. Buſqueſe el Log. de 1012659. La operacion es la ſiguiente.

Logar. de	1012	3.0051805
	1013	3.0056094
Diferencia		4289
Reſto de figuras		× 659
Producto		2826,451
+ *Logar. de* 1012		0051805
Logar. de 1012659 ...		6.0054631

Se pone por Châracteriſtica 6, por conſtar la quantidad dada de *ſiete* figuras.

298 PROBLEMA II. *Dado un Logarithmo mayor, que el mayor de las Tablas, encontrar ſu Numero correſpondiente.*

Si el Logarithmo dado fueſſe la *Suma* de otros Logarithmos, que en las Tablas ſe encuentren (lo que ſe conoce quitando del Logarithmo dado otro Logarithmo de las Tablas) el producto de los Numeros correſpondientes á eſtos Logarithmos ſerá el Numero buſcado.

Mas ſi el tal Logarithmo fueſſe *Multiplice* de al-

algun Logarithmo de las Tablas, el Numero buſcado ſerá la reſpectiva Potencia del Numero, de cuyo Logarithmo es multiplo el Logárithmo dado, eſto es, el *Quadrado* ſi fueſſe el *Duplo*, el *Cubo* ſi fueſſe el *Triplo*, &c.

Finalmente tomeſe eſta Regla general.

Regla. *Quiteſe de la Châracteriſtica del Logarithmo dado quantas unidades ſe quiera, con tal que quede inferior al Logarithmo mayor, que en las Tablas ſe encuentre. Buſqueſele al Logarithmo aſsi diſminuido ſu Numero correſpondiente en las Tablas, el qual multiplicado por la Potencia de* 10, *cuyo Exponente ſon las unidades quitadas de la Châracteriſtica* (eſto es por 100 ſi ſe han quitado 2, por 1000 ſi 3, &c.) *el producto ſerá el Numero buſcado.*

Dado el Logarithmo 4.3010300 para hallar ſu Numero, la operacion es la ſiguiente.

Del Logarithmo dado	4.3010300
Quitando por exemplo	3.
Reſta, y Logarithmo	1.3010300
Cuyo Numero es	20
Multiplicado por $10^3 =$	1000
Producto, ò Numero buſcado	20000

La razon es evidente, porque quitando unidades à la Châracteriſtica del Logarithmo dado, ſe divide ſu correſpondiente Numero (aunque no ſe conozca) por 10, 100, 1000, &c.

&c. luego multiplicando deſpues el quociente por el miſmo Diviſor, el producto ſerá el Numero buſcado.

299 PROBLEMA III. *Dado un Numero Intermedio à los de las Tablas, encontrar ſu Logarithmo.*

Eſtando en las Tablas los Numeros Enteros, el Intermedio debe ſer mixto de Entero, y Fraccion Comun, ò Decimal.

Eſto ſupueſto, ò bien reduciendo la quantidad mixta à Fraccion Comun impropria, *quiteſe del Logarithmo del Numerador el del Denominador, y la reſta ſerá el Logarithmo de la quantidad mixta dada*; ò bien *reduciendo la parte fraccional à Fraccion Decimal* (ſino lo eſtá) *buſqueſe el Logarithmo de toda la quantidad, como ſi todas las figuras fueſſen de Enteros, y quitando de la Châracteriſtica tantas unidades, quantas figuras de Decimales habia en el Numero dado, la reſta ſerá el Logarithmo que ſe buſca.*

Buſqueſe el Logarithmo de $4\frac{9}{12}$.

Por el primer methodo.		*Por el ſegundo methodo.*	
$4\frac{9}{12} = \frac{57}{12}$		$4\frac{9}{12} = 4.75$	
Log. de 57)	1.755874	*Log. de* 475)	2.676693
—*Log. de* 12)	1.079181	*Quitando* . .	2.
Log. de $\frac{57}{12}$)	0.676693	*Log. de* 4.75)	0.676693

300 Algunas veces (aunque no con tanta exactitud) conſiderando que $4\frac{9}{12}$ es mayor que

que 4, y menor que 5, ſu Logarithmo tambien ha de ſer mayor que el de 4, y menor que el de 5; por conſiguiente ſerá la ſuma del Logarithmo de 4, y de la *Diferencia* con que el Logarithmo buſcado excede al tal Logarithmo. Eſta *Diferencia* ſe toma proporcional à las diferencias de los Numeros, y de los reſpectivos Logarithmos de eſta ſuerte:

Como la Diferencia (1) *de los* Numeros *de las* Tablas
A la Diferencia *de ſus* Logarithmos:
Aſsi la Diferencia ($\frac{9}{12}$) *entre el* Numero dado, *y* ſu immediato inferior
A un Quarto Proporcional,

el qual añadido al Logarithmo del Numero immediato inferior (4) da el Logarithmo que ſe buſca.

301 PROBLEMA IV. *Dado un Logarithmo Intermedio à los de las Tablas, encontrar ſu Numero.*

Eſtando en las Tablas los Logarithmos de todos los Enteros, ſus Intermedios han de ſer Logarithmos de quantidades mixtas de Entero, y Fraccion Comun, ò Decimal; por lo tanto, ò bien *añadaſe al Logarithmo dado qualquier otro Logarithmo, el Numero que correſponda à eſta ſuma ſerá el Numerador, el Numero que correſponda al Logarithmo que ſe añade,*

de, ſerá el Denominador de la Fraccion Comun impropria, igual al Numero que ſe buſca; ò bien *añadanſe quantas unidades ſe quiera à la Châracteriſtica del Logarithmo dado, y del Numero que correſponde à eſte nuevo Logarithmo, ſeparenſe para Decimales tantas figuras, quantas unidades ſe hayan añadido à la Châracteriſtica del Logarithmo dado.*

Eſtas Reglas ſon las Inverſas del Problema antecedente, y en ſus Exemplos ſe puede hacer la operacion, tomando por Logarithmo dado el de la Fraccion impropria.

Aſſi dado el Logar. Intermedio 0.1383027 ſu Numero ſe encontrará por las ſiguientes operaciones.

Por el primer methodo.	*Por el ſegundo methodo.*
Logar. dado 0.138302	*Log. dado* 0.138302
+*Log. de* 40) 1.602060	*Añadiendo* 3 —
Log. de 55) 1.740362	*Log. de* 1375) 3.138302
Num. buſcado $\frac{55}{40} = 1\frac{3}{8}$	*Num. buſc.* $1.375 = 1\frac{3}{8}$

302 PROBLEMA V. *Dado un Numero Inferior à los de las Tablas, encontrar ſu Logarithmo*; y al contrario *Dado un Logarithmo Inferior à los de las Tablas, encontrar ſu Numero.*

Como en las Tablas eſtán los Numeros Enteros, comenzando deſde 1 âcia arriba, el Numero inferior à los de las Tablas debe ſer menor que 1; por conſiguiente Fraccion Propria

pria Comun, ò Decimal, y como ſon los miſmos los methodos para buſcar los Logarithmos de qualeſquiera *Fracciones*, ſean Proprias, ſean Improprias, aſſi en Comunes, como Decimales, las miſmas Reglas que ſe han dado para encontrar los Logarithmos de las Fracciones Improprias, ſirven tambien para las Proprias, y las miſmas que ſe han dado en el Prob. 4. para encontrar los Numeros que correſponden à los Logarithmos Intermedios, ſirven para que dado un Logarithmo Inferior à los de las Tablas, ſe les encuentre ſu Numero, pues ſon preciſamente las Inverſas à las del Prob. 3.

303 Para lo qual tengaſe preſente eſta obſervacion, que en el Syſtema de los Logarithmos de Briggs, exceptuando las Chàracteriſticas (que ſe conocen por el numero, y calidad de figuras, de que la quantidad conſte) los miſmos ſon los Logarithmos de las Fracciones Decimales proprias, ò improprias, que los de los Enteros, que conſten de las miſmas figuras, lo que depende de la Multiplicacion, y Diviſion de Potencias de 10, que en eſte Syſtema de Logarithmos ſe hace por las Chàracteriſticas. Aſſi el Logarithmo de 475 (que es 2.6766936) menos 1, ſerá el de 47.5; menos 2, ſerá el de 4.75; aſſimiſmo el Logarithmo de 0.475, ſerá — 1.6766936.

ARTI-

ARTICULO III.

De la Arithmetica Logarithmica.

304 HEmos visto los Principios en que se fundan ya los Logarithmos en comun, ya los de Briggs en particular; pero como los Principiantes gustan de tener las Reglas puestas en limpio, y confirmadas para su inteligencia con algunos Exemplos, pongo aquí la *Arithmetica Logarithmica*, para cuya inteligencia se ha de tener presente, que el Calculo por los Logarithmos es en substancia el mismo, que el Calculo de las Potencias por medio de los Exponentes.

El methodo de encontrar en las Tablas los Logarithmos de los Numeros Enteros depende del modo, con que las Tablas mismas están arregladas, el qual se suele explicar en los Prolegomenos, que las preceden. Las de Mr. Rivard solo llegan à 20000, las de Sherwin, no mas abultadas que las de Mr. Rivard, pueden servir hasta 10 millones, esto es, *para todo Entero, que se exprima por siete figuras.*

El modo de servirse de ellas está en sus Prolegomenos en idioma Inglés; pero si el tiem-

tiempo, y las circunſtancias neceſſarias para ello me favorecen, eſpero poderlas reimprimir para el uſo de nueſtros Eſpañoles, poniendo ſus excelentes Prolegomenos en nueſtro idioma, pues neceſſitamos de unas buenas Tablas manuales en Eſpaña.

Las operaciones que ſe pueden hacer por medio de los Logarithmos, ſon *Multiplicar*, y *Dividir*; por conſiguiente tambien lo que de eſtas operaciones depende, es à ſaber, encontrar un *Medio*, un *Tercero*, un *Quarto proporcional*, levantar un Numero à *qualquier Potencia*, y extraher de qualquier Numero dado *qualquier Raiz*. Los Principios, en que ſe fundan las Reglas para eſtas operaciones, eſtán ya dadas en el Capitulo precedente, por eſſo las omitiré aquí.

Arithmetica Logarithmica de los Enteros.

305 PROBLEMA I. *Multiplicar por medio de los Logarithmos dos, ò mas Numeros entre sí.*

Regla. *Sumenſe los Logarithmos de los factores, y la Suma ſerá el Logarithmo del Producto* (num. 284, 4°.)

Hayaſe de multiplicar 485 por 978.

2.6857417 . .	*Log. del Multip^dor.*	485
2.9903389 . .	*Log. del Multip^dor.*	978
Suma 5.6760806 . .	*Log. del Producto*	474330

306 PROBL. II. *Dividir un Numero por otro.*

Regla. *Quiteſe del Logarithmo del Dividendo el del Diviſor, la Reſta ſerá el Logarithmo del Quociente* (num. 284, 5°.)

Hayaſe de dividir 19035 por 423.

4.2795529 .. *Log. del Dividendo* 19035
2.6263404 .. *Log. del Diviſor* 423
Reſta 1.6532125 .. *Log. del Quociente* = 45

307 PROBL. III. *Encontrar un Medio Geometrico Proporcional entre dos terminos dados.*

Regla. *Sumenſe los Logarithmos de los terminos dados, y la mitad de eſta Suma ſerá el Logarithmo del Medio Proporcional* (num. 287.)

Hayaſe de encontrar un Medio Proporcional entre 9, y 729.

0.9542425 .. *Log. de* 9
2.8627275 .. *Log. de* 729
Suma 3.8169700
Mitad 1.9084850 .. *Log. de* 81,

que es Medio Proporcional entre 9, y 729.

Aſſi el doble del Logarithmo del Medio Proporcional ſerá igual à la Suma de los Logarithmos de los Extremos.

308 PROBLEMA IV. *Encontrar un Tercero Proporcional à dos terminos dados.*

Regla. *Del doble del Logarithmo del Segundo quiteſe el Logarithmo del Primero, la Reſta ſerá el Logar. del Tercero Proporcional* (n. 284, 7°.)

Ha-

Hayaſe de encontrar un Tercero Proporcional à 70, y 4900.

3.6901961 ... *Logar. de* 4900
7.3803922 ... *Su doble*
1.8450980 ... *Logar. de* 70

Reſta 5.5352942 ... *Logar. de* 343000.

que es Tercero Proporcional à 70, y 4900.

309 PROBLEMA V. *Encontrar un Quarto Proporcional à tres terminos dados.*

Regla. *De la Suma de los Logarithmos del Segundo, y Tercero quiteſe el Logarithmo del Primero, la Reſta ſerá el Logarithmo del Quarto Proporcional* (num. 284, 7°.)

En eſte Problema conſiſte el principal uſo de los Logarithmos, que es para la *Regla de Proporcion.*

EXEMPLO.

Si 60 *Hombres* ganan 45 *Libras*, 86 quanto ganarán?

En Numeros $60 : 45 :: 86 : \frac{86 \times 45}{60} = 64.5.$

En Logar. 1.6532125 .. *Log. de* 45
1.9344985 .. *Log. de* 86

Suma 3.5877110 .. *Log. de* 3870 *Prod.*
1.7781513 .. *Log. de* 60

Reſta 1.8095597 .. *Log. de* 64.5 *Q. Prop.*

Si la Regla de Proporcion fueſſe *Inverſa, de la Suma de los Logarithmos del Primero, y*

Segundo quiteſe el Logarithmo del Tercero, la Reſta ſerá el Logar. del Quarto Proporcional.

Si la Regla de Proporcion fueſſe *Compueſta*, ſe han de ſumar los Logarithmos de las cauſas con los Logarithmos de las reſpectivas circunſtancias, para tener los Logarithmos de los terminos correſpondientes.

Algunas veces, eſpecialmente los Authores Ingleſes, en vez de *quitar* un Logarithmo de otro, *añaden* ſu *Complemento Arithmetico*, deſpreciando deſpues en la Suma tantas *Decenas* quantos Complementos Arithmeticos ſe han añadido, y el reſultado viene à ſer el miſmo que ſi ſe hubieſſe quitado el Logarithmo, que por el comun methodo ſe habia de quitar, logrando con eſto, que en el obrar por Logarithmos jamás ſe haya de practicar otra Regla, que el Sumar.

E X E M P L O.

4 *Hombres* levantan 9 *Arrobas* de peſo, quantas levantarán 12 *Hombres*?

En Numeros $4 : 9 :: 12 : \frac{12 \times 9}{4} = 27.$

Por el methodo comun.	*Por el Complemento Arithm.*
Log. de 9)0.9542425	*Comp. de* 4)9.3979400
Log. de 12)1.0791812	*Log. de* 9)0.9542425
L. de 108)2.0334237	*Log. de* 12)1.0791812
Log. de 4)0.6020600	*Suma* . . . 11.4313637
Log. de 27)1.4313637	*Menos* . . . 10.
	Log. de 27)1.4313637

PRO-

310 PROBLEMA VI. *Levantar un termino dado à qualquier Potencia.*

Regla. *Multipliqueſe el Logarithmo del termino dado por el Exponente de la Potencia que ſe buſca, el Producto ſerá el Logarithmo de la tal Potencia* (num. 285.)

Hayaſe de levantar el Numero 32 à Quadrado, ò ſegunda Potencia.

1.5051500 ... *Log. de* 32.
× 2 ... *Exponente de la Potencia.*
3.0103000 ... *Log. de* 1024 = 32^2.

Multiplicando el Logarithmo del Numero dado por 3, ſe levantaria à *Cubo*; multiplicandolo por *n*, ſe levantaria à la Potencia *n*.

311 PROBLEMA VII. *Sacar qualquier Raiz de un Numero dado.*

Regla. *Dividaſele ſu Logarithmo por el Exponente de la Raiz, el Quociente ſerá el Logarithmo de la Raiz que ſe buſca* (num. 286.)

Hayaſe de ſacar la Raiz Cubica de 5451776.

6.7365380(*Log. de* 5451776
3 (*Exponente de la Raiz Cubica.*
Quoc. 2.2455126(*Log. de* 176 = $\sqrt[3]{}$ 5451776.

Aſſimiſmo dividiendo dicho Logarithmo por 4, el Quociente ſerá el Logarithmo de la Raiz quarta, y en general dividiendolo por *n*, el Quociente ſerá el de la Raiz *n*.

Arith-

Arithmetica Logarithmica de las Fracciones Comunes, y Decimales.

312 PROBLEMA I. *Encontrar el Logarithmo de una Fraccion Comun.*

Regla. *Del Logarithmo del Numerador quiteſe el Logarithmo del Denominador, la Reſta ſerá el Logarithmo de la Fraccion* (n. 284, 6°.)

Hayaſe de encontrar el Logarithmo de $\frac{25}{496}$.

1.3979400 . . . *Log. de* 25
2.6954817 . . . *Log. de* 496
Reſta = 2.7024583 . . . *Log. de* $\frac{25}{496}$.

Como toda quantidad mixta de Entero, y Fraccion comun, como $36\frac{2}{5}$, ſe puede reducir à Fraccion comun impropria, reducida que ſea, valdrá tambien en ella la Regla dada. Aſſi porque $36\frac{2}{5} = \frac{110}{5}$, tambien ſu Logarithmo ſerá el de 110, es à ſaber 2.0413927 — 0.4771213 (Logar. de 3) = 1.5642714.

313 PROBLEMA II. *Encontrar el Logarithmo de qualquier Fraccion Decimal pura, ò mixta de Enteros, y Decimales.*

Regla. *Buſqueſe el Logarithmo de la tal quantidad como ſi todas las cifras fueſſen de Enteros, y de ſu Characteriſtica quitenſe tantas unidades, quantas figuras hai de Decimales en la quantidad dada.*

Buſ-

Buſqueſe el Logarithmo de 0.00475.

OPERACION.

Log. de 475 ..... 2.6766936
Menos 5
Log. de 0.00475 ... — 3.6766936.

Teniendo pues por los Problemas dados los Logarithmos de las Fracciones, aſſi Comunes, como Decimales, el Calculo, y fin de dichos Logarithmos, es el miſmo que el de los Enteros, y aſſi no es neceſſario repetirlo.

Las *Tablas Logarithmicas* mas frequentes de que tenemos noticia ſon las Grandes, y Pequeñas de Ulac, las Manuales de Mr. Rivard, impreſſas en París año 1743, las de Mr. Sherwin, impreſſas por tercera vez en Londres en 1742. Las de Mr. Rivard ſon mas claritas, las de Mr. Sherwin ſon mas completas, aquellas con algunos Prolegomenos, aunque ſucintos en Francés, eſtas exceden notablemente en ſus Prolegomenos en Inglés; pero las mejores de todas quantas en Nacion alguna, de que tengamos noticia, han ſalido, ſon las de Mr. Guillermo Gardiner, impreſſas en Londres año 1742, las quales contienen el Canon Logarithmico Numerico, y Trigonometrico, aunque para ſolos Numeros es excelente el Canon Antilogarithmico de James Dodſon Inglés.

CAPI-

CAPITULO XX.

De los Logarithmos Hyperbolicos.

Su Formacion.

314 VIsta la mucha semejanza que tienen los Logarithmos en comun con los Exponentes, ò Indices de las Potencias, cuya Raiz sea la Base Logarithmica, para decir algo de los Logarithmos Hyperbolicos, que otros llaman *Logarithmos Naturales*, *Logarithmos de Neper*, sea la Razon comun de una Progression Geometrica infinitamente proxima à la Razon de Igualdad, ò lo que es lo mismo, el Exceso de a (Base Logarithmica) sobre la unidad sea infinitamente pequeño, de manera que algunos, ò muchos terminos de la Progression $1, a, a^2, a^3, a^4,$ &c. coincidan con los terminos de la Série de los Numeros Naturales 2, 3, 4, 5, &c. los Indices de estas Potencias $a, a^2, a^3, a^4,$ &c. serán los Logarithmos de los Numeros à quienes dichas Potencias igualen, de manera que si $a^m = 2$, $a^n = 3$, m, y n serán los Logarithmos de 2, de 3, y $m + n$ el Logarithmo de $2 \times 3 = 6$, segun la doctrina comun de Logarithmos.

Si

Si eſtos Indices ſe multiplican, ò ſe dividen por una miſma quantidad, guardarán los Productos, ò Quocientes, que ſerán los Multiplices, ò las partes ſemejantes de eſtos Indices, la miſma Razon que ellos; por conſiguiente las propriedades generales de los Logarithmos, que provienen de ſer los Logarithmos Indices, convendrán tambien à ſus Multiplices, ò Submultiplices, que ſon los Indices multiplicados, ò divididos por una quantidad conſtante, unos de eſtos ſon los que llamamos *Logarithmos Hyperbolicos*, por explicarſe por cierta propriedad de la Hyperbola.

315 Eſto ſupueſto, el *Logarithmo Hyperbolico de algun Numero es el Indice, ò Exponente del termino de la Progreſsion Geometrica, que iguala al tal Numero, multiplicado eſte Indice por el Exceſſo de la Razon comun de la Progreſsion ſobre la unidad.*

Y aſſi ſi e es una quantidad infinitamente pequeña, ſe podrá formar eſta Progreſſion

$$1 : (1+e)^1 : (1+e)^2 : (1+e)^3 : (1+e)^4 \ldots (1+e)^n,$$

la Razon Geometrica reinante de eſta Progreſſion ſerá $1+e : 1 = 1+e$, y el Exceſſo de la tal Razon ſobre la unidad ſerá $1+e-1=e$, que multiplicado por n, Indice del termino $(1+e)^n$ de la tal Progreſſion, dará ne por Logarithmo Hyperbolico del Numero, à quien $(1+e)^n$ es igual, y aſſi los Logarithmos Hyperbo-

perbolicos de los terminos de esta Progression Geometrica son los terminos de la Progresion Arithmetica, como se vé en estas dos

$$\div\div 1 : (1+e)^1 : (1+e)^2 : (1+e)^3 : (1+e)^4 \ldots (1+e)^n$$
$$\div 0 , \; 1e \; . \; 2e \; . \; 3e \; . \; 4e \ldots . \; ne$$

316 Esto supuesto lo particular que hai para la practica en estos Logarithmos (porque las operaciones se hacen como en los de Briggs) es 1°. *Dado el Logarithmo Hyperbolico, encontrar su Numero.* 2°. *Dado el Numero, encontrar su Logarithmo Hyperbolico.* 3°. *Puesta una Tabla de Logarithmos Hyperbolicos hasta un determinado Numero, encontrar los Logarithmos de los Numeros intermedios.* 4°. *Encontrar los Logarithmos Hyperbolicos de los Numeros, que exceden al Mayor de las Tablas.*

317 PROBLEMA I. *Dado el Logarithmo Hyperbolico* (L) *de un Numero* (N), *encontrar este Numero.*

Sea $(1+e)^n$ el termino de la Progression Geometrica igual al tal Numero, esto es $N = (1+e)^n = 1 + ne + n \times \frac{n-1}{2} e^2 + n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} e^3$, &c. en donde porque e es quantidad infinitamente pequeña, y Fraccion, será aun mas pequeña e^2, e^3, &c. y siendo n mui grande en comparacion de -1, -2, -3, &c. sin error sensible se podrán menospreciar, ò juzgar

gar por o los terminos negativos; por consiguiente tendrémos en la Equacion propuesta $1 + ne + \frac{n^2e^2}{2} + \frac{n^3e^3}{2\times3} + \frac{n^4e^4}{2\times3\times4}$, &c. $= N$; pero el Logarithmo Hyperbolico $L = ne$: luego substituyendo L en lugar de ne, L^2 en lugar de n^2e^2, &c. será $1 + L + \frac{L^2}{2} + \frac{L^3}{2\times3} + \frac{L^4}{2\times3\times4} + \frac{L^5}{2\times3\times4\times5}$, &c. $= N$, el Numero buscado.

318 PROBLEMA II. *Dado un Numero N, encontrarle su Logarithmo Hyperbolico.*

Porque $N = (1 + e)^n$, sacando la Raiz n de entrambas partes, tendrémos $(1 + e) = N^{\frac{1}{n}} = (1 + x)^m$, haciendo $N = 1 + x$, $m = \frac{1}{n}$. Reduciendolo à la larga será $(1 + x)^m = 1 + mx + m\times\frac{m-1}{2}x^2 + m\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}x^3$, &c. $= 1 + e$, quitando de entrambas partes 1, será $e = mx + m\times\frac{m-1}{2}x^2 + m\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}x^3$, &c. en la qual Equacion, porque $1 + e = (1 + x)^m$, será m quantidad mui pequeña en comparacion de 1, 2, 3, &c. y assi despreciando m en los factores $m - 1$, $m - 2$, $m - 3$, &c. de los coeficientes, tendrémos $e = mx - \frac{mx^2}{2} + \frac{mx^3}{3} - \frac{mx^4}{4}$, &c. y dividiendolo todo por

por m, ſerá $\frac{e}{m} (= ne = L) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$, &c. en la qual ſiendo dado x, porque ſe nos da $N (= 1 + x)$ ſe conocerá tambien el valor de la Série, que nos exprime el Logarithmo Hyperbolico del Numero dado N.

319 Pero eſta Série, que exprime el valor del Logarithmo Hyperbolico de un Numero dado, aunque buena, y facil, es de poco uſo en los Numeros grandes, por ſer *divergente*; por lo tanto han diſcurrido los Mathematicos una Série igualmente facil, pero mas oportuna, por ſer ſiempre *convergente*.

Para eſto ſea el Numero, cuyo Logarithmo buſcamos, $\frac{1}{1-x}$, en la qual expreſſion, por grande que ſea el Numero, ſiempre ſerá x menor que la unidad. Sea à mas de eſto $(1 + e)^n$ el termino de la Progreſſion Geometrica igual al tal Numero, ò lo que es lo miſmo $\frac{1}{1-x} = (1 + e)^n$, ſacando la Raiz n de entrambas partes, tendrémos $1 + e = \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{n}}} = (1 - x)^{-\frac{1}{n}} = (1 - x)^m$ (haciendo $m = -\frac{1}{n}$) $= 1 - mx + m \times \frac{m-1}{1} x^2 - m \times \frac{m-1}{2} x^{\frac{m-2}{3}} x^3$ &c. en la qual menoſpreciando m en los factores $m - 1$, $m - 2$, $m - 3$, &c. de los

los coeficientes tendrémos $1 + e = 1 - mx - \frac{mx^2}{2} - \frac{mx^3}{3}$, &c. de donde quitando de entrambas partes 1, y dividiendo lo demás por $-m$, reſultará $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$, &c. $= \frac{e}{-m} = ne =$ al Logarithmo de $\frac{1}{1-x}$, la qual Série ſiempre es convergente, por ſer ſiempre x menor que la unidad, por conſiguiente Fraccion tanto mas pequeña, quanto mayor es $\frac{1}{1-x} = N$.

Pero advirtiendo, que eſta Série $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$, &c. Logarithmo de $\frac{1}{1-x}$, es en todo la miſma, excepto la alternacion de Signos, que la de arriba $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$, &c. Logarithmo de $1 + x$, ſi ſe ſuman entrambas, ſu Suma $2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7}$, &c. ſerá el Logarithmo del Producto $\frac{1}{1-x} \times (1 + x) = \frac{1+x}{1-x}$; luego haciendo el Entero $N = \frac{1+x}{1-x}$, por conſiguiente $x = \frac{N-1}{N+1}$, y ſi el Numero dado fueſſe Fraccion $\frac{P}{Q}$, haciendo $\frac{P}{Q} = \frac{1+x}{1-x}$, ſería $x = \frac{P-Q}{P+Q}$, ſubſtituyendo en lugar de

de x ſu valor, tendrémos para la expreſſion de qualquier Logarithmo Hyperbolico, aſſi de Enteros, como de Quebrados eſta Série $2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9}$, &c. la qual es ſiempre convergente, y el valor de x es mucho menor, que en las demás.

320 De todo eſto ſe pueden ſacar Reglas generales para encontrar ya los Logarithmos Hyperbolicos de los Numeros Enteros, ya los de los Quebrados.

Para los Numeros Enteros.

Regla. *Dividaſe el Numero dado menos* 1 *por el Numero dado mas* 1, *ſumenſe las Potencias impares de eſte Quociente divididas por los Numeros impares, que ſon ſus Exponentes, y el duplo de eſta Suma ſerá el Logarithmo Hyperbolico del Numero dado.*

Para los Numeros Quebrados.

Regla. *Dividaſe la Diferencia entre Numerador, y Denominador por la Suma del Numerador, y del Denominador, ſumenſe las Potencias impares de eſte Quociente, divididas por los Numeros impares, que ſon ſus Exponentes, y el duplo de eſta Suma ſerá el Logarithmo Hyperbolico de la Fraccion dada.*

Porque, ò bien ſea $x = \frac{N-1}{N+1}$, ò bien ſea $x = \frac{P-Q}{P+Q}$, ſiempre la Série $2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7}$, &c. = L.

La

La practica de estas Reglas, y aplicacion de esta Série se ve en el Exemplo siguiente.

Busquese el Logarithmo Hyperbolico de 2. Será $N=2$, $x=\frac{N-1}{N+1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$, substituyendo $\frac{1}{3}$ en lugar de x, y sus Potencias en la Série $2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\frac{2x^7}{7}$, &c. tendrémos

$x\ (=\frac{1}{3}) = 0.33333333, : 1 = 0.33333333$
$x^3\ (=\frac{1}{9}\times x) = 0.03703703, : 3 = 0.01234567$
$x^5\ (=\frac{1}{9}\times x^3) = 0.00411522, : 5 = 0.00082304$
$x^7\ (=\frac{1}{9}\times x^5) = 0.00045724, : 7 = 0.00006532$
$x^9\ (=\frac{1}{9}\times x^7) = 0.00005080, : 9 = 0.00000564$
$x^{11}\ (=\frac{1}{9}\times x^9) = 0.00000564, : 11 = 0.00000051$

Suma de los Quocientes $= 0.34657351$
Cuyo duplo $= 0.69314702$

Será pues el Logarithmo Hyperbolico de 2 (Numero dado) $= 0.69314702$, &c.

Practica de los Logarithmos Hyperbolicos.

321 Fundado en estas Séries, y Reglas, que hasta aquí hemos dado, calculó Euler en su Introduccion al Analisi *cap.* 7. los Logarithmos Hyperbolicos desde 1 hasta 10, y fundado en las mismas Mr. John Turner sacó una Tabla breve de los mismos, añadiendo aun las *Centesimas*, la qual comunicó à su ami-

amigo Thomás Simpſon, que por ſer breve, de ſuma utilidad, y que no ſe ſuele encontrar en lo comun de las Tablas Logarithmicas, pondré aquí para los aficionados al Calculo Integral, ò al Methodo Inverſo de las Fluxiones, para quienes eſpecialmente en puntos de Fluxiones de las Exponenciales es del todo neceſſaria, poniendo tambien dos Problemas, que enſeñen el modo de ſervirſe de ella.

Toda la dificultad en ſervirſe de unas Tablas Logarithmicas conſiſte en buſcar los Logarithmos de los Numeros intermedios à los de las Tablas, y los de los Numeros ſuperiores al mayor de los que en las Tablas ſe encuentren.

322 PROBLEMA I. *Encontrar el Logarithmo Hyperbolico de qualquier Numero Entero, ò Quebrado comprehendido entre* 1, *y* 10.

Si el tal Numero comprehendido entre 1, y 10 fueſſe Entero, ò que puramente conſte de Entero, y ſolas *Centeſimas*, buſqueſe el tal Numero en la Tabla, y à ſu lado ſe le encontrará ſu Logarithmo correſpondiente. Aſſi ſi buſco el Logarithmo de 2.99, à ſu lado ſe encontrará ſer 1.0952733; pero ſi conſtaſſe de *Mileſimas*, *Diezmileſimas*, *&c.* tomeſe eſta Regla. *Del Numero dado quiteſe el immediato inferior en la Tabla; dividaſe la Diferencia por la ſuma de eſte Numero immediato inferior, y la mitad de la Diferencia miſma; y añadaſe eſte*

eſte Quociente al Logarithmo del Numero immediato inferior, eſta ſuma ſerá el Logarithmo Hyperbolico del Numero dado.

Buſqueſe el Logarithmo Hyperbolico de 3.45678. Como eſte Numero es mayor que 3.45, y menor que 3.46, ſu Logarithmo ſe ha de comprehender entre los Logarithmos de eſtos Numeros. Quitando pues del Numero dado el immediato inferior de la Tabla 3.45, tendrémos 3.45678 — 3.45 = 0.00678, que dividido por 3.45 + 0.00339 = 3.45339, Suma del Numero immediato inferior de la Tabla, y de la mitad de la Diferencia, da por Quociente .0019632, el qual añadido al Logarithmo del Numero immediato inferior de la Tabla 1.2383742 dará 1.2403374, por Logarithmo Hyperbolico de 3.45678.

323 PROBLEMA II. *Encontrar el Logarithmo Hyperbolico de qualquier Numero Entero, ò Quebrado, que exceda al mayor de la Tabla, ò à* 10.

Regla. *Conſiderenſe todas ſus cifras, excepto la primera, como Decimales, y de eſta ſuerte buſqueſele el Logarithmo* (que ſe encontrará, ò en la Tabla, ò por la Operacion del Problema precedente) *añadaſe al Logarithmo encontrado el Tantuplo del Logarithmo de* 10 (que eſtá en la Tabla) *quantuplo es el Numero de cifras, que ſe han tomado por Decimales, que en el Numero dado no lo eran, y*

esta suma será el Logarithmo del Numero que se busca.

Busqueſe el Logarithmo Hyperbolico de 345.678. Conſiderando todas ſus cifras, excepto la primera, como Decimales, tendrémos 3.45678, cuyo Logarithmo, ſegun el Problema 1, ſerá 1.2403374, à quien añadiendo el *duplo* del Logarithmo de 10 = 2 x 2.3025851 = 4.6051702 (porque ſe han tomado como Decimales *dos* cifras, que en el Numero dado no lo eran) ſerá 1.2403374 + 4.6051702 = 5.8455076, Logarithmo Hyperbolico de 345.678.

La razon de eſta Operacion es, porque tomando *dos* cifras como Decimales, divido el tal Numero por 100, con que añadiendo deſpues à ſu Logarithmo el de 100, que es el *duplo* del de 10, vuelvo à multiplicar con los Logarithmos por la miſma quantidad, por la qual antes la habia dividido, y aſſi ſe queda la quantidad dada con ſu Logarithmo correſpondiente.

De ahí ſe ve, que en eſte Syſtema para Multiplicar, ò Dividir por 10, ò ſus Potencias ſe ha de añadir, ò quitar el tantuplo de 2.3025851 (Log. de 10), quantuplo es reſpeto de la unidad el Exponente de la Potencia de 10, por la qual ſe multiplica, ò divide.

324 Si alguno no tubieſſe à mano eſta Tabla, ni quiſiera fatigarſe en encontrar el Lo-

Logarithmo Hyperbolico de algun Numero fumando la Série arriba propueſta, ſe podrá valer de la Razon, que tienen entre sí los Logarithmos de Briggs con los Hyperbolicos, pues todos los Syſtemas de Logarithmos tienen entre sí una Razon conſtante.

La Razon que tienen los Logarithmos de Briggs con los Hyperbolicos, y los Hyperbolicos con los de Briggs ſe ve en eſtas dos Proporciones:

Log. de Briggs : *Log. Hyperbolico* :: 1: 2.3025851
Log. Hyperbolico : *Log. de Briggs* :: 1: 0.4342944

luego tendrémos

Log. Hyperbolico = *Log. de Briggs* x 2.3025851
Log. de Briggs = *Log. Hyperbolico* x 0.4342944

Aſſi dado algun Numero para encontrarle ſu Logarithmo Hyperbolico, multipliqueſe el Logarithmo de Briggs del tal Numero por 2.3025851, el Producto ſerá el Logarithmo Hyperbolico del dicho Numero. Para encontrar el Logarithmo de Briggs de algun Numero dado, multipliqueſe el Hyperbolico del miſmo Numero por 0.4342944, el Producto ſerá el Logarithmo de Briggs, que correſponde al tal Numero.

N.	Logarithm.	N.	Logarithm.	N.	Logarithm.
1.01	.0099503	1.34	.2926696	1.67	.5128236
1.02	.0198026	1.35	.3001045	1.68	.5187937
1.03	.0295588	1.36	.3074846	1.69	.5247285
1.04	.0392207	1.37	.3148107	1.70	.5306282
1.05	.0487902	1.38	.3220834	1.71	.5364933
1.06	.0582689	1.39	.3293037	1.72	.5423242
1.07	.0676586	1.40	.3364722	1.73	.5481214
1.08	.0769610	1.41	.3435897	1.74	.5538851
1.09	.0861777	1.42	.3506568	1.75	.5596157
1.10	.0953102	1.43	.3576744	1.76	.5653138
1.11	.1043600	1.44	.3646431	1.77	.5709795
1.12	.1133287	1.45	.3715635	1.78	.5766133
1.13	.1222176	1.46	.3784364	1.79	.5822156
1.14	.1310283	1.47	.3852624	1.80	.5877866
1.15	.1397619	1.48	.3920420	1.81	.5933268
1.16	.1484200	1.49	.3987761	1.82	.5988365
1.17	.1570037	1.50	.4054651	1.83	.6043159
1.18	.1655144	1.51	.4121096	1.84	.6097655
1.19	.1739533	1.52	.4187103	1.85	.6151856
1.20	.1823215	1.53	.4252677	1.86	.6205764
1.21	.1906203	1.54	.4317824	1.87	.6259384
1.22	.1988508	1.55	.4382549	1.88	.6312717
1.23	.2070141	1.56	.4446858	1.89	.6365768
1.24	.2151113	1.57	.4510756	1.90	.6418538
1.25	.2231435	1.58	.4574248	1.91	.6471032
1.26	.2311117	1.59	.4637340	1.92	.6523251
1.27	.2390169	1.60	.4700036	1.93	.6575200
1.28	.2468600	1.61	.4762341	1.94	.6626879
1.29	.2546422	1.62	.4824261	1.95	.6678293
1.30	.2623642	1.63	.4885800	1.96	.6729444
1.31	.2700271	1.64	.4946962	1.97	.6780335
1.32	.2776317	1.65	.5007752	1.98	.6830968
1.33	.2851789	1.66	.5068175	1.99	.6881346
1.34	.2926696	1.67	.5128236	2.00	.6931472

N.	Logarithm.	N.	Logarithm.	N.	Logarithm.
2.01	.6981347	2.34	.8501509	2.67	.9820784
2.02	.7030974	2.35	.8544153	2.68	.9858167
2.03	.7080357	2.36	.8586616	2.69	.9895411
2.04	.7129497	2.37	.8628899	2.70	.9932517
2.05	.7178397	2.38	.8671004	2.71	.9969486
2.06	.7227059	2.39	.8712933	2.72	1.0006318
2.07	.7275485	2.40	.8754687	2.73	1.0043015
2.08	.7323678	2.41	.8796267	2.74	1.0079579
2.09	.7371640	2.42	.8837675	2.75	1.0116008
2.10	.7419373	2.43	.8878912	2.76	1.0152306
2.11	.7466879	2.44	.8919980	2.77	1.0188473
2.12	.7514160	2.45	.8960880	2.78	1.0224509
2.13	.7561219	2.46	.9001613	2.79	1.0260415
2.14	.7608058	2.47	.9042181	2.80	1.0296194
2.15	.7654678	2.48	.9082585	2.81	1.0331844
2.16	.7701082	2.49	.9122826	2.82	1.0367368
2.17	.7747271	2.50	.9162907	2.83	1.0402766
2.18	.7793248	2.51	.9202827	2.84	1.0438040
2.19	.7839015	2.52	.9242589	2.85	1.0473189
2.20	.7884573	2.53	.9282193	2.86	1.0508216
2.21	.7929925	2.54	.9321640	2.87	1.0543120
2.22	.7975071	2.55	.9360933	2.88	1.0577902
2.23	.8020015	2.56	.9400072	2.89	1.0612564
2.24	.8064758	2.57	.9439058	2.90	1.0647107
2.25	.8109302	2.58	.9477893	2.91	1.0681530
2.26	.8153648	2.59	.9516578	2.92	1.0715836
2.27	.8197798	2.60	.9555114	2.93	1.0750024
2.28	.8241754	2.61	.9593502	2.94	1.0784095
2.29	.8285518	2.62	.9631743	2.95	1.0818051
2.30	.8329091	2.63	.9669838	2.96	1.0851892
2.31	.8372475	2.64	.9707789	2.97	1.0885619
2.32	.8415671	2.65	.9745596	2.98	1.0919233
2.33	.8458682	2.66	.9783261	2.99	1.0952733
2.34	.8501509	2.67	.9820784	3.00	1.0986123

N.	Logarithm.	N.	Logarithm.	N.	Logarithm.
3.01	1.1019400	3.34	1.2059707	3.67	1.3001916
3.02	1.1052568	3.35	1.2089603	3.68	1.3029127
3.03	1.1085626	3.36	1.2119409	3.69	1.3056264
3.04	1.1118575	3.37	1.2149127	3.70	1.3083328
3.05	1.1151415	3.38	1.2178757	3.71	1.3110318
3.06	1.1184149	3.39	1.2208299	3.72	1.3137236
3.07	1.1216775	3.40	1.2237754	3.73	1.3164082
3.08	1.1249295	3.41	1.2267122	3.74	1.3190856
3.09	1.1281710	3.42	1.2296405	3.75	1.3217558
3.10	1.1314021	3.43	1.2325605	3.76	1.3244189
3.11	1.1346227	3.44	1.2354714	3.77	1.3270749
3.12	1.1378330	3.45	1.2383742	3.78	1.3297240
3.13	1.1410330	3.46	1.2412685	3.79	1.3323660
3.14	1.1442227	3.47	1.2441545	3.80	1.3350010
3.15	1.1474024	3.48	1.2470322	3.81	1.3376291
3.16	1.1505720	3.49	1.2499017	3.82	1.3402504
3.17	1.1537315	3.50	1.2527629	3.83	1.3428648
3.18	1.1568811	3.51	1.2556160	3.84	1.3454723
3.19	1.1600209	3.52	1.2584609	3.85	1.3480731
3.20	1.1631508	3.53	1.2612978	3.86	1.3506671
3.21	1.1662709	3.54	1.2641266	3.87	1.3532544
3.22	1.1693813	3.55	1.2669475	3.88	1.3558351
3.23	1.1724821	3.56	1.2697605	3.89	1.3584091
3.24	1.1755733	3.57	1.2725655	3.90	1.3609765
3.25	1.1786549	3.58	1.2753627	3.91	1.3635373
3.26	1.1817291	3.59	1.2781521	3.92	1.3660916
3.27	1.1847899	3.60	1.2809338	3.93	1.3686394
3.28	1.1878434	3.61	1.2837077	3.94	1.3711807
3.29	1.1908875	3.62	1.2864740	3.95	1.3737156
3.30	1.1939224	3.63	1.2892326	3.96	1.3762440
3.31	1.1969481	3.64	1.2919836	3.97	1.3787661
3.32	1.1999647	3.65	1.2947271	3.98	1.3812818
3.33	1.2029722	3.66	1.2974631	3.99	1.3837912
3.34	1.2059707	3.67	1.3001916	4.00	1.3862943

N.	Logarithm.
4.01	1.3887912
4.02	1.3912818
4.03	1.3937663
4.04	1.3962446
4.05	1.3987168
4.06	1.4011829
4.07	1.4036429
4.08	1.4060969
4.09	1.4085449
4.10	1.4109869
4.11	1.4134230
4.12	1.4158531
4.13	1.4182774
4.14	1.4206957
4.15	1.4231083
4.16	1.4255150
4.17	1.4279160
4.18	1.4303112
4.19	1.4327007
4.20	1.4350845
4.21	1.4374626
4.22	1.4398351
4.23	1.4422020
4.24	1.4445632
4.25	1.4469189
4.26	1.4492691
4.27	1.4516138
4.28	1.4539530
4.29	1.4562867
4.30	1.4586149
4.31	1.4609379
4.32	1.4632553
4.33	1.4655675
4.34	1.4678743

N.	Logarithm.
4.34	1.4678743
4.35	1.4701758
4.36	1.4724720
4.37	1.4747630
4.38	1.4770487
4.39	1.4793292
4.40	1.4816045
4.41	1.4838746
4.42	1.4861396
4.43	1.4883995
4.44	1.4906543
4.45	1.4929040
4.46	1.4951487
4.47	1.4973883
4.48	1.4996230
4.49	1.5018527
4.50	1.5040774
4.51	1.5062971
4.52	1.5085119
4.53	1.5107219
4.54	1.5129269
4.55	1.5151272
4.56	1.5173226
4.57	1.5195132
4.58	1.5216990
4.59	1.5238800
4.60	1.5260563
4.61	1.5282278
4.62	1.5303947
4.63	1.5325568
4.64	1.5347143
4.65	1.5368672
4.66	1.5390154
4.67	1.5411590

N.	Logarithm.
4.67	1.5411590
4.68	1.5432981
4.69	1.5454325
4.70	1.5475625
4.71	1.5496879
4.72	1.5518087
4.73	1.5539252
4.74	1.5560371
4.75	1.5581446
4.76	1.5602476
4.77	1.5623462
4.78	1.5644405
4.79	1.5665304
4.80	1.5686159
4.81	1.5706971
4.82	1.5727739
4.83	1.5748464
4.84	1.5769147
4.85	1.5789787
4.86	1.5810384
4.87	1.5830939
4.88	1.5851452
4.89	1.5871923
4.90	1.5892352
4.91	1.5912739
4.92	1.5933085
4.93	1.5953389
4.94	1.5973653
4.95	1.5993875
4.96	1.6014057
4.97	1.6034198
4.98	1.6054298
4.99	1.6074358
5.00	1.6094379

N.	Logarithm.	N.	Logarithm.	N.	Logarithm.
5.01	1.6114359	5.34	1.6752256	5.67	1.7351891
5.02	1.6134300	5.35	1.6770965	5.68	1.7369512
5.03	1.6154200	5.36	1.6789639	5.69	1.7387102
5.04	1.6174060	5.37	1.6808278	5.70	1.7404661
5.05	1.6193882	5.38	1.6826882	5.71	1.7422189
5.06	1.6213664	5.39	1.6845453	5.72	1.7439687
5.07	1.6233408	5.40	1.6863989	5.73	1.7457155
5.08	1.6253112	5.41	1.6882491	5.74	1.7474591
5.09	1.6272778	5.42	1.6900958	5.75	1.7491998
5.10	1.6292405	5.43	1.6919391	5.76	1.7509374
5.11	1.6311994	5.44	1.6937790	5.77	1.7526720
5.12	1.6331544	5.45	1.6956155	5.78	1.7544036
5.13	1.6351056	5.46	1.6974487	5.79	1.7561323
5.14	1.6370530	5.47	1.6992786	5.80	1.7578579
5.15	1.6389967	5.48	1.7011051	5.81	1.7595805
5.16	1.6409365	5.49	1.7029282	5.82	1.7613002
5.17	1.6428726	5.50	1.7047481	5.83	1.7630170
5.18	1.6448050	5.51	1.7065646	5.84	1.7647308
5.19	1.6467336	5.52	1.7083778	5.85	1.7664416
5.20	1.6486586	5.53	1.7101878	5.86	1.7681496
5.21	1.6505798	5.54	1.7119944	5.87	1.7698546
5.22	1.6524974	5.55	1.7137979	5.88	1.7715567
5.23	1.6544112	5.56	1.7155981	5.89	1.7732559
5.24	1.6563214	5.57	1.7173950	5.90	1.7749523
5.25	1.6582280	5.58	1.7191887	5.91	1.7766458
5.26	1.6601310	5.59	1.7209792	5.92	1.7783364
5.27	1.6620303	5.60	1.7227666	5.93	1.7800242
5.28	1.6639260	5.61	1.7245507	5.94	1.7817091
5.29	1.6658182	5.62	1.7263316	5.95	1.7833912
5.30	1.6677068	5.63	1.7281094	5.96	1.7850704
5.31	1.6695918	5.64	1.7298840	5.97	1.7867469
5.32	1.6714733	5.65	1.7316555	5.98	1.7884205
5.33	1.6733512	5.66	1.7334238	5.99	1.7900914
5.34	1.6752256	5.67	1.7351891	6.00	1.7917594

N.	Logarithm.	N.	Logarithm.	N.	Logarithm.
6.01	1.7934247	6.34	1.8468787	6.67	1.8976198
6.02	1.7950872	6.35	1.8484547	6.68	1.8991179
6.03	1.7967470	6.36	1.8500283	6.69	1.9006138
6.04	1.7984040	6.37	1.8515994	6.70	1.9021075
6.05	1.8000582	6.38	1.8531680	6.71	1.9035989
6.06	1.8017098	6.39	1.8547342	6.72	1.9050881
6.07	1.8033586	6.40	1.8562979	6.73	1.9065751
6.08	1.8050047	6.41	1.8578592	6.74	1.9080600
6.09	1.8066481	6.42	1.8594181	6.75	1.9095425
6.10	1.8082887	6.43	1.8609745	6.76	1.9110228
6.11	1.8099267	6.44	1.8625285	6.77	1.9125011
6.12	1.8115621	6.45	1.8640801	6.78	1.9139771
6.13	1.8131947	6.46	1.8656293	6.79	1.9154509
6.14	1.8148247	6.47	1.8671761	6.80	1.9169226
6.15	1.8164520	6.48	1.8687205	6.81	1.9183921
6.16	1.8180767	6.49	1.8702625	6.82	1.9198594
6.17	1.8196988	6.50	1.8718021	6.83	1.9213247
6.18	1.8213182	6.51	1.8733394	6.84	1.9227877
6.19	1.8229351	6.52	1.8748743	6.85	1.9242486
6.20	1.8245493	6.53	1.8764069	6.86	1.9257074
6.21	1.8261608	6.54	1.8779371	6.87	1.9271641
6.22	1.8277699	6.55	1.8794650	6.88	1.9286186
6.23	1.8293763	6.56	1.8809906	6.89	1.9300710
6.24	1.8309801	6.57	1.8825138	6.90	1.9315214
6.25	1.8325814	6.58	1.8840347	6.91	1.9329696
6.26	1.8341801	6.59	1.8855533	6.92	1.9344157
6.27	1.8357763	6.60	1.8870696	6.93	1.9358598
6.28	1.8373699	6.61	1.8885837	6.94	1.9373017
6.29	1.8389610	6.62	1.8900954	6.95	1.9387416
6.30	1.8405496	6.63	1.8916048	6.96	1.9401794
6.31	1.8421356	6.64	1.8931119	6.97	1.9416152
6.32	1.8437191	6.65	1.8946168	6.98	1.9430489
6.33	1.8453002	6.66	1.8961194	6.99	1.9444805
6.34	1.8468787	6.67	1.8976198	7.00	1.9459101

N.	Logarithm.	N.	Logarithm.	N.	Logarithm.
7.01	1.9473376	7.34	1.9933387	7.67	2.0373166
7.02	1.9487632	7.35	1.9947002	7.68	2.0386195
7.03	1.9501866	7.36	1.9960599	7.69	2.0399207
7.04	1.9516080	7.37	1.9974177	7.70	2.0412203
7.05	1.9530275	7.38	1.9987736	7.71	2.0425181
7.06	1.9544449	7.39	2.0001278	7.72	2.0438143
7.07	1.9558604	7.40	2.0014800	7.73	2.0451088
7.08	1.9572739	7.41	2.0028305	7.74	2.0464016
7.09	1.9586853	7.42	2.0041790	7.75	2.0476928
7.10	1.9600947	7.43	2.0055258	7.76	2.0489823
7.11	1.9615022	7.44	2.0068708	7.77	2.0502701
7.12	1.9629077	7.45	2.0082140	7.78	2.0515563
7.13	1.9643112	7.46	2.0095553	7.79	2.0528408
7.14	1.9657127	7.47	2.0108949	7.80	2.0541237
7.15	1.9671123	7.48	2.0122327	7.81	2.0554049
7.16	1.9685099	7.49	2.0135687	7.82	2.0566845
7.17	1.9699056	7.50	2.0149030	7.83	2.0579624
7.18	1.9712993	7.51	2.0162354	7.84	2.0592388
7.19	1.9726911	7.52	2.0175661	7.85	2.0605135
7.20	1.9740810	7.53	2.0188950	7.86	2.0617866
7.21	1.9754689	7.54	2.0202221	7.87	2.0630580
7.22	1.9768549	7.55	2.0215475	7.88	2.0643278
7.23	1.9782390	7.56	2.0228711	7.89	2.0655961
7.24	1.9796212	7.57	2.0241929	7.90	2.0668627
7.25	1.9810014	7.58	2.0255131	7.91	2.0681277
7.26	1.9823798	7.59	2.0268315	7.92	2.0693911
7.27	1.9837562	7.60	2.0281482	7.93	2.0706530
7.28	1.9851308	7.61	2.0294631	7.94	2.0719132
7.29	1.9865035	7.62	2.0307763	7.95	2.0731719
7.30	1.9878743	7.63	2.0320878	7.96	2.0744290
7.31	1.9892432	7.64	2.0333976	7.97	2.0756845
7.32	1.9906103	7.65	2.0347056	7.98	2.0769384
7.33	1.9919754	7.66	2.0360119	7.99	2.0781907
7.34	1.9933387	7.67	2.0373166	8.00	2.0794415

N.	Logarithm.	N.	Logarithm.	N.	Logarithm.
8.01	2.0806907	8.34	2.1210632	8.67	2.1598687
8.02	2.0819384	8.35	2.1222615	8.68	2.1610215
8.03	2.0831845	8.36	2.1234584	8.69	2.1621729
8.04	2.0844290	8.37	2.1246539	8.70	2.1633230
8.05	2.0856720	8.38	2.1258479	8.71	2.1644718
8.06	2.0869135	8.39	2.1270405	8.72	2.1656192
8.07	2.0881534	8.40	2.1282317	8.73	2.1667653
8.08	2.0893918	8.41	2.1294214	8.74	2.1679101
8.09	2.0906287	8.42	2.1306098	8.75	2.1690536
8.10	2.0918640	8.43	2.1317967	8.76	2.1701959
8.11	2.0930984	8.44	2.1329822	8.77	2.1713367
8.12	2.0943306	8.45	2.1341664	8.78	2.1724763
8.13	2.0955613	8.46	2.1353491	8.79	2.1736146
8.14	2.0967905	8.47	2.1365304	8.80	2.1747517
8.15	2.0980182	8.48	2.1377104	8.81	2.1758874
8.16	2.0992444	8.49	2.1388889	8.82	2.1770218
8.17	2.1004691	8.50	2.1400661	8.83	2.1781550
8.18	2.1016923	8.51	2.1412419	8.84	2.1792868
8.19	2.1029140	8.52	2.1424163	8.85	2.1804174
8.20	2.1041341	8.53	2.1435893	8.86	2.1815467
8.21	2.1053529	8.54	2.1447609	8.87	2.1826747
8.22	2.1065702	8.55	2.1459312	8.88	2.1838015
8.23	2.1077861	8.56	2.1471001	8.89	2.1849270
8.24	2.1089998	8.57	2.1482676	8.90	2.1860512
8.25	2.1102128	8.58	2.1494339	8.91	2.1871742
8.26	2.1114243	8.59	2.1505987	8.92	2.1882959
8.27	2.1126343	8.60	2.1517622	8.93	2.1894163
8.28	2.1138428	8.61	2.1529243	8.94	2.1905355
8.29	2.1150499	8.62	2.1540851	8.95	2.1916535
8.30	2.1162555	8.63	2.1552445	8.96	2.1927702
8.31	2.1174596	8.64	2.1564026	8.97	2.1938856
8.32	2.1186622	8.65	2.1575593	8.98	2.1949998
8.33	2.1198634	8.66	2.1587147	8.99	2.1961128
8.34	2.1210632	8.67	2.1598687	9.00	2.1972245